目　录

第一章 Nevanlinna 理论概要

1925 年，R. Nevanlinna[1] 建立了亚纯函数的两个基本定理，开始了值分布理论的近代研究. 几十年来，亚纯函数值分布理论的新发展都是以 Nevanlinna 理论为基础的. 所以作为开始的一章，我们扼要介绍 Nevanlinna 理论1). 在本章最后一节还将介绍庄圻泰[5]关于 Nevanlinna 第二基本定理的一个重要推广.

§1.1. Poisson-Jensen 公式

1.1.1. Poisson-Jensen 公式

在 Nevanlinna 理论中，下述 Poisson-Jensen 公式起着十分重要的作用.

定理 1.1. 设函数 $f(\zeta)$ 在 $|\zeta| \leqslant R(0 < R < \infty)$ 上亚纯，a_μ $(\mu = 1, 2, \cdots, M)$，$b_\nu(\nu = 1, 2, \cdots, N)$ 分别为 $f(\zeta)$ 在 $|\zeta| < R$ 内的零点和极点. 若 $z = re^{i\theta}$ 为 $|\zeta| < R$ 内不与 a_μ，b_ν 相重的任意一点，则

$$\log|f(z)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(Re^{i\varphi})| \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\theta - \varphi) + r^2} d\varphi$$

$$+ \sum_{\mu=1}^{M} \log\left|\frac{R(z - a_\mu)}{R^2 - \bar{a}_\mu z}\right| - \sum_{\nu=1}^{N} \log\left|\frac{R(z - b_\nu)}{R^2 - \bar{b}_\nu z}\right|. \quad (1.1.1)$$

证. 首先我们假定在 $|\zeta| \leqslant R$ 上，$f(\zeta)$ 既无零点又无极点. 这时 $\log f(\zeta)$ 是该圆上的全纯函数，于是 $\log f(\zeta)$ 在 $|\zeta| \leqslant R$ 上 Taylor 展式的首项系数应为

---

1) 关于 Nevanlinna 理论，有兴趣的读者可参阅 Nevanlinna[1,2,3]，Hayman[2]，Tsuji[1]，Гольдберг и Островский[1]，小泽满[1].

$$\log f(0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=R}\log f(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log f(Re^{i\varphi})d\varphi. \tag{1.1.2}$$

将上式两端取实部，就证明了 (1.1.1) 式中 $z=0$ 的情况．对于一般情形，命

$$w=\frac{R(\zeta-z)}{R^2-\bar{z}\zeta}.$$

它将 $|\zeta|\leqslant R$ 映为 $|w|\leqslant 1$，将 $\zeta=z$ 映为 $w=0$，其逆为 $\zeta=\frac{R(Rw+z)}{R+\bar{z}w}$．记 $F(w)=f\left(\frac{R(Rw+z)}{R+\bar{z}w}\right)$，则 $F(w)$ 在 $|w|\leqslant 1$ 上亚纯，且既无零点又无极点．按照 (1.1.2) 式应有

$$\log F(0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=1}\log F(w)\frac{dw}{w}.$$

但是

$$\frac{dw}{w}=d(\log w)=\frac{d\zeta}{\zeta-z}+\frac{\bar{z}d\zeta}{R^2-\bar{z}\zeta}=\frac{(R^2-|z|^2)d\zeta}{(R^2-\bar{z}\zeta)(\zeta-z)}.$$

从而

$$\log f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=R}\log f(\zeta)\frac{R^2-|z|^2}{(R^2-\bar{z}\zeta)(\zeta-z)}d\zeta. \tag{1.1.3}$$

在 $|\zeta|=R$ 上，$\zeta=Re^{i\varphi}$，$d\zeta=iRe^{i\varphi}d\varphi$，

$$\begin{aligned}(R^2-\bar{z}\zeta)(\zeta-z)&=(R^2-Rre^{i(\varphi-\theta)})(Re^{i\varphi}-re^{i\theta})\\&=Re^{i\varphi}\{R^2-2Rr\cos(\varphi-\theta)+r^2\}.\end{aligned}$$

将这些代入 (1.1.3) 式，并取实部即得

$$\log|f(z)|=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(Re^{i\varphi})| \times\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\varphi-\theta)+r^2}d\varphi. \tag{1.1.4}$$

当 $f(\zeta)$ 在 $|\zeta|=R$ 上有零点和极点，而在 $|\zeta|<R$ 内既无零点又无极点时，显然在 $|\zeta|=R$ 上 $f(\zeta)$ 的零点和极点的数目

是有穷的，以每个零点和极点为心，充分小的正数 ε 为半径作小圆周．这些小圆周位于 $|\zeta| \leqslant R$ 内的部分与 $|\zeta| = R$ 上留下的弧段组成闭围线 Γ_ε，它所范围的区域为 D_ε． 在 D_ε 内

$$\frac{\log f(\zeta)(R^2 - |z|^2)}{(R^2 - \bar{z}\zeta)(\zeta - z)}$$

除 $\zeta = z$ 外全纯，在 $\zeta = z$ 处有一个极点，残数为 $\log f(z)$．根据残数定理有

$$\log f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\varepsilon} \log f(\zeta) \frac{R^2 - |z|^2}{(R^2 - \bar{z}\zeta)(\zeta - z)} d\zeta.$$

可以看出在 ε 为半径的小圆周弧上，被积函数的模为 $O\left(\log\frac{1}{\varepsilon}\right)$，而小圆周弧的长度小于 $2\pi\varepsilon$．于是在这些小圆周弧上的积分应随 ε 趋向于 0． 从而这时 (1.1.4) 式也成立．

当 $f(\zeta)$ 在 $|\zeta| < R$ 内有零点和极点时，记其零点和极点分别为 $a_\mu(\mu = 1, 2, \cdots, M)$ 和 $b_\nu(\nu = 1, 2, \cdots, N)$，重级零点和极点须按其重数计算．命

$$g(\zeta) = f(\zeta)\frac{\prod\limits_{\nu=1}^{N}\dfrac{R(\zeta - b_\nu)}{R^2 - \bar{b}_\nu\zeta}}{\prod\limits_{\mu=1}^{M}\dfrac{R(\zeta - a_\mu)}{R^2 - \bar{a}_\mu\zeta}}.$$

函数 $g(\zeta)$ 在 $|\zeta| \leqslant R$ 上亚纯，在 $|\zeta| < R$ 内既无零点又无极点，根据以上的证明有

$$\log|g(z)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|g(Re^{i\varphi})|$$

$$\times \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\theta - \varphi) + r^2} d\varphi.$$

但是

$$|g(Re^{i\varphi})| = |f(Re^{i\varphi})|, \quad (0 \leqslant \varphi < 2\pi),$$

$$\log|g(z)| = \log|f(z)| + \sum_{\nu=1}^{N} \log\left|\frac{R(z-b_\nu)}{R^2-\bar{b}_\nu z}\right|$$

$$-\sum_{\mu=1}^{M} \log\left|\frac{R(z-a_\mu)}{R^2-\bar{a}_\mu z}\right|,$$

这样便可得到(1.1.1)式.

1.1.2. 推论

系 1. 在定理 1.1 条件下，若 $f(\zeta)$ 在 $|\zeta| \leqslant R$ 上没有零点和极点，则对于任意点 z，$|z| = r < R$，有

$$\log|f(z)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(Re^{i\varphi})| \times \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\theta-\varphi) + r^2}\, d\varphi. \qquad (1.1.5)$$

这就是 Poisson 公式.

系 2. 在定理 1.1 条件下，若 $f(0) \neq 0, \infty$，则

$$\log|f(0)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(Re^{i\varphi})|\, d\varphi - \sum_{\mu=1}^{M} \log\frac{R}{|a_\mu|} + \sum_{\nu=1}^{N} \log\frac{R}{|b_\nu|}. \qquad (1.1.6)$$

(1.1.6)称为 Jensen 公式.

当 $f(0) = 0$ 时，记其重级为 $n(0, f=0)$；当 $f(0) = \infty$ 时，记其重级为 $n(0, f=\infty)$.（当 $f(0) \neq 0$ 时，则 $n(0, f=0) = 0$. 同样当 $f(0) \neq \infty$ 时，则 $n(0, f=\infty) = 0$.）若令 $\tau = n(0, f=0) - n(0, f=\infty)$，则无论那种情况在原点邻域内总有展式

$$f(\zeta) = c_\tau \zeta^\tau + \cdots, \quad c_\tau \neq 0.$$

命

$$g(\zeta) = \begin{cases} f(\zeta)\left(\dfrac{R}{\zeta}\right)^\tau & \zeta \neq 0, \\ c_\tau R^\tau & \zeta = 0. \end{cases}$$

$g(\zeta)$ 在 $|\zeta| \leqslant R$ 上亚纯，且 $g(0) \neq 0, \infty$. 对 $g(\zeta)$ 应用 Jensen 公式 (1.1.6)，并计及 $|g(Re^{i\varphi})| = |f(Re^{i\varphi})|$，则得

$$\log|c_\tau| + \tau \log R = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(Re^{i\varphi})| d\varphi$$

$$- \sum_{0<|a_\mu|<R} \log \frac{R}{|a_\mu|} + \sum_{0<|b_\nu|<R} \log \frac{R}{|b_\nu|}.$$

即

$$\log|c_\tau| + n(0, f=0)\log R = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(Re^{i\varphi})| d\varphi$$

$$- \sum_{0<|a_\mu|<R} \log \frac{R}{|a_\mu|} + \sum_{0<|b_\nu|<R} \log \frac{R}{|b_\nu|} + n(0, f=\infty)\log R. \tag{1.1.7}$$

这是 Jensen 公式的普遍形式.

§ 1.2. 特征函数与第一基本定理

1.2.1. 特征函数.

为了将 Jensen 公式变形和定义亚纯函数的特征函数，我们先引进正对数.

定义 1.1. 对于 $x \geqslant 0$，定义

$$\log^+ x = \max(\log x, 0) = \begin{cases} \log x & x \geqslant 1, \\ 0 & 0 \leqslant x < 1. \end{cases} \tag{1.2.1}$$

容易看出，对于任意正数 x 有

$$\log x = \log^+ x - \log^+ \frac{1}{x}.$$

于是对于 $|z| < R$ 内亚纯的函数 $f(z)$ 与 $0 < r < R$ 有

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(re^{i\varphi})| d\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+|f(re^{i\varphi})| d\varphi$$

$$- \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ \frac{1}{|f(re^{i\varphi})|} d\varphi.$$

另一方面，记 $f(z)$ 在 $|z|\leqslant r$ 上的极点数为 $n(r,f)$，重级极点按其重数计算. 以 $n(0,f)$ 表示 $f(z)$ 在原点处极点的重级（当 $f(0)\neq\infty$ 时，则 $n(0,f)=0$）. $f(z)$ 在 $0<|z|\leqslant r$ 的极点记为 $b_1, b_2, \cdots, b_N$，每个 b_ν 出现的次数等于 $f(z)$ 在 b_ν 极点的重级. 这时

$$\sum_{\nu=1}^{N}\log\frac{r}{|b_\nu|}=\int_0^r\log\frac{r}{t}\,d(n(t,f)-n(0,f)).$$

分部积分后即有

$$\sum_{\nu=1}^{N}\log\frac{r}{|b_\nu|}=\int_0^r\frac{n(t,f)-n(0,f)}{t}\,dt.$$

同样若记 $f(z)$ 在 $|z|\leqslant r$ 上的零点数为 $n\left(r,\frac{1}{f}\right)$，$f(z)$ 在原点处的零点重级为 $n\left(0,\frac{1}{f}\right)$，记 $f(z)$ 在 $0<|z|\leqslant r$ 的零点为 $a_1, a_2, \cdots, a_M$，每个 a_μ 出现的次数等于其零点的重级，则

$$\sum_{\mu=1}^{M}\log\frac{r}{|a_\mu|}=\int_0^r\frac{n\left(t,\frac{1}{f}\right)-n\left(0,\frac{1}{f}\right)}{t}\,dt.$$

于是 Jensen 公式可以写为

$$\begin{aligned}
&\log|c_\lambda|+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+\frac{1}{|f(re^{i\varphi})|}\,d\varphi\\
&\quad+\int_0^r\frac{n\left(t,\frac{1}{f}\right)-n\left(0,\frac{1}{f}\right)}{t}\,dt+n\left(0,\frac{1}{f}\right)\log r\\
&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+|f(re^{i\varphi})|\,d\varphi+\int_0^r\frac{n(t,f)-n(0,f)}{t}\,dt\\
&\quad+n(0,f)\log r.
\end{aligned}$$

基于这样的形式，Nevanlinna[1,2] 曾引进以下几个函数.

定义 1.2.

$$
\left.\begin{aligned}
m(r,f) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+|f(re^{i\varphi})|\,d\varphi,\\
m\left(r,\frac{1}{f-a}\right) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+\frac{1}{|f(re^{i\varphi})-a|}\,d\varphi, a\neq\infty.
\end{aligned}\right\}\quad(1.2.2)
$$

$m(r,f)$ 也记为 $m(r,f=\infty)$ 或 $m(r,\infty)$，是 $|f(z)|$ 的正对数在 $|z|=r$ 上的平均值；$m\left(r,\frac{1}{f-a}\right)$ 也记为 $m(r,f=a)$ 或 $m(r,a)$.

定义 1.3.

$$
\left.\begin{aligned}
N(r,f) &= \int_0^r \frac{n(t,f)-n(0,f)}{t}\,dt + n(0,f)\log r,\\
N\left(r,\frac{1}{f-a}\right) &= \int_0^r \frac{n\left(t,\frac{1}{f-a}\right)-n\left(0,\frac{1}{f-a}\right)}{t}\,dt\\
&\quad + n\left(0,\frac{1}{f-a}\right)\log r, \quad a\neq\infty.
\end{aligned}\right\}\quad(1.2.3)
$$

这里 $n\left(t,\frac{1}{f-a}\right)$ 表示 $|z|\leqslant t$ 上 $f(z)-a$ 的零点个数，重级零点按其重数计算，$n\left(t,\frac{1}{f-a}\right)$ 也记为 $n(t,f=a)$ 或 $n(t,a)$. $n\left(0,\frac{1}{f-a}\right)$ 则表示 $f(z)-a$ 在原点的重级，它也记为 $n(0,f=a)$ 或 $n(0,a)$. $N(r,f)$ 有时记为 $N(r,f=\infty)$ 或 $N(r,\infty)$，是 $f(z)$ 极点的密指量；$N\left(r,\frac{1}{f-a}\right)$ 有时记为 $N(r,f=a)$ 或 $N(r,a)$，是 $f(z)$ 的 a-值点的密值量.

定义 1.4. $T(r,f)=m(r,f)+N(r,f)$. (1.2.4)

$T(r,f)$ 称为 $f(z)$ 的特征函数. 显然它是非负函数.

于是 Jensen 公式可以写为

$$
\log|c_\lambda| + T\left(r,\frac{1}{f}\right) = T(r,f). \quad (1.2.5)
$$

(1.2.5)有时也称为 Jensen-Nevanlinna 公式.

1.2.2. 函数的积与和的特征函数、例

为了讨论有限个亚纯函数的乘积与和的特征函数，我们先注意正对数的几个性质.

设 $a_\nu(\nu=1,2,\cdots,p)$ 为任意 p 个有穷复数，则

$$\begin{aligned}\log^+\left|\prod_{\nu=1}^p a_\nu\right| &\leqslant \log^+\left\{\prod_{\nu=1}^p \max(1,|a_\nu|)\right\}\\ &=\log\left\{\prod_{\nu=1}^p \max(1,|a_\nu|)\right\}\\ &=\sum_{\nu=1}^p \log\{\max(1,|a_\nu|)\}=\sum_{\nu=1}^p \log^+|a_\nu|,\end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned}\log^+\left|\sum_{\nu=1}^p a_\nu\right| &\leqslant \log^+\left\{\sum_{\nu=1}^p |a_\nu|\right\}\\ &\leqslant \log^+\left\{p\left(\max_{1\leqslant\nu\leqslant p}|a_\nu|\right)\right\}\leqslant\sum_{\nu=1}^p\log^+|a_\nu|+\log p.\end{aligned}$$

据此，若 $f_\nu(z)(\nu=1,2,\cdots,p)$ 为 p 个于 $|z|<R$ 内亚纯的函数，则对于 $0<r<R$ 有

$$m\left(r,\prod_{\nu=1}^p f_\nu\right)\leqslant\sum_{\nu=1}^p m(r,f_\nu),$$

$$m\left(r,\sum_{\nu=1}^p f_\nu\right)\leqslant\sum_{\nu=1}^p m(r,f_\nu)+\log p.$$

此外对于 $0<r<R$ 显然有

$$n\left(r,\prod_{\nu=1}^p f_\nu\right)\leqslant\sum_{\nu=1}^p n(r,f_\nu),$$

$$n\left(r,\sum_{\nu=1}^p f_\nu\right)\leqslant\sum_{\nu=1}^p n(r,f_\nu).$$

于是

$$T\left(r, \prod_{\nu=1}^{p} f_\nu\right) \leqslant \sum_{\nu=1}^{p} T(r, f_\nu), \tag{1.2.6}$$

$$T\left(r, \sum_{\nu=1}^{p} f_\nu\right) \leqslant \sum_{\nu=1}^{p} T(r, f_\nu) + \log p. \tag{1.2.7}$$

例.

1) $f(z) = c$.

这时 $m(r,f) = \log^+|c|, N(r,f) = 0$. 于是 $T(r,f) = \log^+|c|$.

2) $$f(z) = \frac{a_p z^p + a_{p-1}z^{p-1} + \cdots + a_0}{b_q z^q + b_{q-1}z^{q-1} + \cdots + b_0}, \quad a_p, b_q \neq 0.$$

当 r 充分大时,

$$m(r, f) = \begin{cases} (p-q)\log r + O(1) & p > q, \\ O(1) & p \leqslant q. \end{cases}$$

$$N(r, f) = q \log r.$$

于是

$$T(r, f) = \max(p, q)\log r + O(1).$$

3) $f(z) = e^z$.

这时

$$m(r, f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+(e^{r\cos\theta})\, d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} r\cos\theta d\theta$$

$$= \frac{r}{\pi}, \qquad N(r, f) = 0.$$

因此 $T(r, f) = \frac{r}{\pi}$.

1.2.3. 第一基本定理、特征函数的性质

现在我们证明 Nevanlinna 第一基本定理.

定理 1.2. 设 $f(z)$ 于 $|z| < R(\leqslant\infty)$ 内亚纯. 若 a 为任一有穷复数,则对于 $0 < r < R$ 有

$$m\left(r,\frac{1}{f-a}\right)+N\left(r,\frac{1}{f-a}\right)$$
$$=T(r,f)+\log|c_\tau|+\varepsilon(a,r),\qquad(1.2.8)$$
其中 c_τ 为 $\dfrac{1}{f(z)-a}$ 在原点的 Taylor 展式中第一个非零系数，而
$$|\varepsilon(a,r)|\leqslant\log^+|a|+\log 2.\qquad(1.2.9)$$
事实上，对于 $f(z)-a$ 应用 Jensen 公式(1.2.5)有
$$T\left(r,\frac{1}{f-a}\right)=T(r,f-a)+\log|c_\tau|.$$
再由
$$T(r,f-a)\leqslant T(r,f)+\log^+|a|+\log 2,$$
与
$$T(r,f)=T(r,f-a+a)\leqslant T(r,f-a)+\log^+|a|+\log 2,$$
便立即有定理结论.

为了以后的应用，我们来讨论特征函数的两个性质.

1) 设 $f(z)$ 在 $|z|<R$ 内亚纯，又设 $g(z)=\dfrac{\alpha f+\beta}{\gamma f+\delta}$，其中 α, β, γ, δ 是常数，且 $\alpha\delta-\beta\gamma\neq 0$，则
$$T(r,g)=T(r,f)+O(1),\quad 0<r<R.\qquad(1.2.10)$$
由于 $f(z)$ 也可以表为
$$f(z)=\frac{-\delta g+\beta}{\gamma g-\alpha},$$
因此我们仅须证明
$$T(r,g)\leqslant T(r,f)+O(1),\ 0<r<R.\qquad(1.2.11)$$
事实上，
$$T(r,g)=T\left(r,\frac{\alpha}{\gamma}+\frac{\beta-\frac{\alpha\delta}{\gamma}}{\gamma f+\delta}\right)\leqslant\log^+\left|\frac{\alpha}{\gamma}\right|+\log^+\left|\beta-\frac{\alpha\delta}{\gamma}\right|+T\left(r,\frac{1}{\gamma f+\delta}\right)+\log 2.\qquad(1.2.12)$$

而

$$T\left(r,\frac{1}{\gamma f+\delta}\right)=T(r,\gamma f+\delta)+O(1)\leqslant T(r,f)$$

$$+\log^+|\gamma|+\log^+|\delta|+\log 2+O(1). \qquad (1.2.13)$$

将(1.2.13)代入(1.2.12),即得(1.2.11).

2) 设 $f(z)$在$|z|\leqslant R$ 上全纯,则对于 $0\leqslant r<R$ 有

$$T(r,f)\leqslant \log^+M(r,f)\leqslant\frac{R+r}{R-r}T(R,f). \qquad (1.2.14)$$

当 $f(z)$ 全纯时, $T(r,f)=m(r,f)$, 于是由 $m(r,f)$ 的定义,(1.2.14)的第一个不等式是明显的.

至于(1.2.14)的第二个不等式,当 $M(r,f)\leqslant 1$ 时显然成立。若 $M(r,f)>1$, 设 $|f(z_0)|=M(r,f)$, 其中 $z_0=re^{i\varphi}$. 应用 Poisson-Jensen 公式,计及$\left|\frac{R(z-a_\mu)}{R^2-\bar{a}_\mu z}\right|<1$, 则

$$\log^+M(r,f)=\log|f(z_0)|$$

$$\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(Re^{i\varphi})|\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)+r^2}d\varphi$$

$$\leqslant\frac{R+r}{R-r}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+|f(Re^{i\varphi})|d\varphi=\frac{R+r}{R-r}T(R,f).$$

1.2.4. Cartan 恒等式. 级

为了获得特征函数的其他性质, 我们需要 H. Cartan[2] 的一个恒等式. 为此先证明

引理 1.1. 设 a 为任一有穷复数, 则

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|a-e^{i\theta}|d\theta=\log^+|a|. \qquad (1.2.15)$$

当 $a=0$ 时, (1.2.15) 成立是显然的. 所以我们可假定 $a\neq 0$. 当$|a|>1$时, 则 $a-z$ 在 $|z|<1$ 内既无零点又无极点. 于是由 Jensen 公式得

$$\log|a|=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|a-e^{i\theta}|d\theta.$$

当 $|a| \leqslant 1$ 时，$a-z$ 在 $|z|<1$ 内有一个零点 a 而无极点，因此

$$\log|a| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|a - e^{i\theta}|d\theta - \log\frac{1}{|a|}.$$

于是无论在哪种情况都有(1.2.15).

定理 1.3. 设 $f(z)$ 在 $|z|<R$ 内亚纯，则对于 $0<r<R$ 有

$$T(r,f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} N(r, f=e^{i\theta})d\theta + \log^+|f(0)|. \quad (1.2.16)$$

证. 对于 $f(z)-e^{i\theta}$ 应用 Jensen 公式有

$$\log|f(0)-e^{i\theta}| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(re^{i\varphi}) - e^{i\theta}|d\varphi$$

$$+ N(r,f) - N(r, f=e^{i\theta}).$$

再对 θ 积分，并交换右端首项的积分次序则

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(0)-e^{i\theta}|d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(re^{i\varphi})\right.$$

$$\left. - e^{i\theta}|d\theta\right\} d\varphi + N(r,f) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} N(r,f=e^{i\theta})d\theta.$$

应用引理 1.1，上式左端为 $\log^+|f(0)|$，右端第一项为

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+|f(re^{i\varphi})|d\varphi, \text{ 即 } m(r,f).$$

于是可得(1.2.16).

(1.2.16)称为 Cartan 恒等式. 从 Cartan 恒等式，我们有

系 1. $T(r,f)$ 是 r 的非减函数.

系 2. $T(r,f)$ 是 $\log r$ 的凸函数.

事实上，

$$\frac{dT(r,f)}{d\log r} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} n(r, f=e^{i\theta})d\theta,$$

而 $n(r, f=e^{i\theta})$ 对于每个 $\theta(0\leqslant\theta<2\pi)$ 都是 r 的非减函数，于是 $T(r,f)$ 是 $\log r$ 的凸函数.

最后我们引入级的定义.

定义 1.5. 设 $S(r)$ 是在 (r_0,∞) 定义的实函数，其中 $r_0\geqslant 0$.

若 $S(r)$ 在该区间内非负且非减，则它的级 λ 和下级 μ 分别定义为

$$\lambda = \varlimsup_{r\to\infty} \frac{\log^+ S(r)}{\log r}, \qquad \mu = \varliminf_{r\to\infty} \frac{\log^+ S(r)}{\log r}.$$

由定义 1.5 显然有 $0 \leqslant \mu \leqslant \lambda \leqslant \infty$.

设 $f(z)$ 于开平面亚纯，则 $T(r, f)$ 是 $(0, \infty)$ 内确定的实函数，且在此区间上非负与非减，于是按照定义 1.5，$T(r, f)$ 有级与下级.

定义 1.6. 设 $f(z)$ 于开平面亚纯，$f(z)$ 的级 λ 与下级 μ 分别定义为 $T(r, f)$ 的级与下级. 即

$$\lambda = \varlimsup_{r\to\infty} \frac{\log^+ T(r,f)}{\log r}, \qquad \mu = \varliminf_{r\to\infty} \frac{\log^+ T(r,f)}{\log r}.$$

应用定理 1.2，$N\left(r, \dfrac{1}{f-a}\right)$ 的级不得超过 $f(z)$ 的级. 但是

$$n\left(r, \frac{1}{f-a}\right) \leqslant \frac{1}{\log 2}\int_r^{2r} \frac{n\left(t, \dfrac{1}{f-a}\right)}{t} dt$$

$$\leqslant \frac{1}{\log 2} N\left(2r, \frac{1}{f-a}\right).$$

于是我们有下述结论：

设函数 $f(z)$ 于开平面亚纯，则对于任意复数 a，$n\left(r, \dfrac{1}{f-a}\right)$ 的级不得超过 $f(z)$ 的级.

深刻的事实是，除去至多可能有两个例外的复数，$n\left(r, \dfrac{1}{f-a}\right)$ 的级恰巧等于 $f(z)$ 的级. 为了证明这个事实，我们进入下一节关于 Nevanlinna 第二基本定理的讨论.

§1.3. 第二基本定理

1.3.1. 第二基本定理的简单形式

在证明 R. Nevanlinna 第二基本定理之前，我们先注意一简

单的事实.

引理 1.2. 设 $f_1(z)$, $f_2(z)$ 为 $|z|<R(\leqslant\infty)$ 内的亚纯函数，则对于 $0<r<R$ 有

$$N(r,f_1f_2)-N\left(r,\frac{1}{f_1f_2}\right)=N(r,f_1)+N(r,f_2)$$

$$-N\left(r,\frac{1}{f_1}\right)-N\left(r,\frac{1}{f_2}\right). \tag{1.3.1}$$

证. 无妨设 $f_1(0)$ 与 $f_2(0)$ 均不等于 0 和 ∞. 在相反的情况，仅须代替 $f_1(0)$ 与 $f_2(0)$ 以它们在原点 Taylor 展式的第一个非零系数.

$$\begin{aligned}
&N(r,f_1f_2)-N\left(r,\frac{1}{f_1f_2}\right)\\
&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\frac{1}{|f_1(re^{i\varphi})f_2(re^{i\varphi})|}d\varphi+\log|f_1(0)f_2(0)|\\
&=\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\frac{1}{|f_1(re^{i\varphi})|}d\varphi+\log|f_1(0)|\right\}\\
&\quad+\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\frac{1}{|f_2(re^{i\varphi})|}d\varphi+\log|f_2(0)|\right\}\\
&=N(r,f_1)-N\left(r,\frac{1}{f_1}\right)+N(r,f_2)-N\left(r,\frac{1}{f_2}\right).
\end{aligned}$$

现在我们证明 Nevanlinna 第二基本定理的简单形式，即含有三个密指量的形式. 这是 1925 年 R. Nevanlinna[1] 最初的结果.

定理 1.4. 设 $f(z)$于 $|z|<R(\leqslant\infty)$ 内亚纯. 若 $f(0)\neq0,1,\infty$; $f'(0)\neq0$, 则对于 $0<r<R$ 有

$$T(r,f)\leqslant N(r,f)+N\left(r,\frac{1}{f}\right)+N\left(r,\frac{1}{f-1}\right)$$

$$-N_1(r)+S(r,f), \tag{1.3.2}$$

其中

$$N_1(r)=(2N(r,f)-N(r,f'))+N\left(r,\frac{1}{f'}\right), \tag{1.3.3}$$

以及

$$S(r,f)=m\left(r,\frac{f'}{f}\right)+m\left(r,\frac{f'}{f-1}\right)$$
$$+\log\left|\frac{f(0)(f(0)-1)}{f'(0)}\right|+\log 2. \qquad (1.3.4)$$

证. 从恒等式

$$\frac{1}{f}\equiv 1-\frac{f'}{f}\cdot\frac{f-1}{f'}$$

出发,有

$$m\left(r,\frac{1}{f}\right)\leqslant m\left(r,\frac{f'}{f}\right)+m\left(r,\frac{f-1}{f'}\right)+\log 2. \qquad (1.3.5)$$

对于项$m\left(r,\frac{1}{f}\right)$应用 Jensen 公式(1.2.5)得

$$m\left(r,\frac{1}{f}\right)=T(r,f)-N\left(r,\frac{1}{f}\right)+\log\frac{1}{|f(0)|}. \qquad (1.3.6)$$

同样对于项$m\left(r,\frac{f-1}{f'}\right)$应用 Jensen 公式有

$$m\left(r,\frac{f-1}{f'}\right)=m\left(r,\frac{f'}{f-1}\right)+\left\{N\left(r,\frac{f'}{f-1}\right)\right.$$
$$\left.-N\left(r,\frac{f-1}{f'}\right)\right\}+\log\left|\frac{f(0)-1}{f'(0)}\right|.$$

对上式右端花括弧中的项应用引理 1.2 得

$$m\left(r,\frac{f-1}{f'}\right)=m\left(r,\frac{f'}{f-1}\right)$$
$$+\left\{N(r,f')+N\left(r,\frac{1}{f-1}\right)\right.$$
$$\left.-N(r,f)-N\left(r,\frac{1}{f'}\right)\right\}+\log\left|\frac{f(0)-1}{f'(0)}\right|. \qquad (1.3.7)$$

将(1.3.6),(1.3.7)两式代入(1.3.5)即有(1.3.2),其中 $N_1(r)$ 与 $S(r,f)$ 分别由(1.3.3)与(1.3.4)给出.

注. 定理 1.4 中 $f(0)\neq 0,1,\infty$ 以及 $f'(0)\neq 0$ 并非本质的限制，它们只是在应用 Jensen 公式时需要用到. 当条件不满足时，仅须将余项 $S(r,f)$ 中的项 $\log\left|\frac{f(0)(f(0)-1)}{f'(0)}\right|$ 相应地加以改变即可.

1.3.2. 第二基本定理的普遍形式

现在我们来推导 Nevanlinna 第二基本定理的普遍形式，它是由 Collingwood[2] 和 Littlewood 推广 Nevanlinna 的结果(定理 1.4)而得到的.

定理 1.5. 设函数 $f(z)$ 于 $|z|<R$ 内亚纯，不蜕化为常数. 又设 $a_\nu(\nu=1,2,\cdots,q)$ 为 $q(\geq 2)$ 个有穷复数，并且 $\min\limits_{1\leq\nu_1<\nu_2\leq q}|a_{\nu_1}-a_{\nu_2}|\geq\delta>0$. 若 $f(0)\neq 0,\infty$; $f'(0)\neq 0$，则对于 $0<r<R$ 有

$$m(r,f)+\sum_{\nu=1}^{q}m(r,a_\nu)\leq 2T(r,f)-N_1(r)+S(r,f). \tag{1.3.8}$$

这里 $N_1(r)$ 仍由 (1.3.3) 式确定，而

$$S(r,f)=m\left(r,\frac{f'}{f}\right)+m\left(r,\sum_{\nu=1}^{q}\frac{f'}{f-a_\nu}\right)$$
$$+q\log^+\frac{2q}{\delta}+\log 2+\log\frac{1}{|f'(0)|}. \tag{1.3.9}$$

证. 作辅助函数

$$F(z)=\sum_{\nu=1}^{q}\frac{1}{f(z)-a_\nu}.$$

对于 r 的固定的值，记 $E_j(j=1,2,\cdots,q)$ 为 $0\leq\theta<2\pi$ 上的集合使得 $|f(re^{i\theta})-a_j|<\frac{\delta}{2q}$.

当 $\nu\neq j$, $\theta\in E_j$ 时，

$$|f(re^{i\theta})-a_\nu| \geqslant |a_\nu - a_j| - |f(re^{i\theta})-a_j|$$
$$\geqslant \delta\left(1-\frac{1}{2q}\right).$$

由

$$F(re^{i\theta}) = \frac{1}{f(re^{i\theta})-a_j}\left\{1+\sum_{\nu\neq j}\frac{f(re^{i\theta})-a_j}{f(re^{i\theta})-a_\nu}\right\},$$

有

$$|F(re^{i\theta})| > \frac{1}{|f(re^{i\theta})-a_j|}\left\{1-(q-1)\frac{\frac{\delta}{2q}}{\delta\left(1-\frac{1}{2q}\right)}\right\}$$
$$> \frac{1}{2|f(re^{i\theta})-a_j|}.$$

注意当 $\theta\in E_j$ 时有 $\theta\bar{\in}E_\nu(\nu\neq j)$，于是

$$\log^+|F(re^{i\theta})| > \log^+\frac{1}{|f(re^{i\theta})-a_j|} - \log 2$$
$$\geqslant \sum_{\nu=1}^{q}\log^+\frac{1}{|f(re^{i\theta})-a_\nu|} - q\log^+\frac{2q}{\delta} - \log 2. \quad (1.3.10)$$

当 θ 不属于 $\bigcup_{j=1}^{q} E_j$ 时，上式显然也成立.

因此对于 $0\leqslant\theta<2\pi$，恒有 (1.3.10) 式. 从而

$$m(r,F) \geqslant \sum_{\nu=1}^{q} m\left(r,\frac{1}{f-a_\nu}\right) - q\log^+\frac{2q}{\delta} - \log 2. \quad (1.3.11)$$

我们再寻求 $m(r,F)$ 的一个适当的上界.

$$m(r,F) \leqslant m(r,f'F) + m\left(r,\frac{1}{f'}\right)$$
$$\leqslant m(r,f'F) + T(r,f') - N\left(r,\frac{1}{f'}\right) + \log\frac{1}{|f'(0)|}. \quad (1.3.12)$$

注意到

$$
\begin{aligned}
T(r,f') &= m(r,f') + N(r,f') \\
&\leqslant m(r,f) + m\left(r,\frac{f'}{f}\right) + N(r,f') \\
&= T(r,f) + m\left(r,\frac{f'}{f}\right) + \{N(r,f') - N(r,f)\},
\end{aligned}
\quad (1.3.13)
$$

将 (1.3.13) 代入 (1.3.12) 后再与 (1.3.11) 进行比较，即得

$$
\begin{aligned}
m(r,f) + \sum_{\nu=1}^{q} m\left(r,\frac{1}{f-a_\nu}\right) \leqslant 2T(r,f) \\
- \left\{2N(r,f) - N(r,f') + N\left(r,\frac{1}{f'}\right)\right\} \\
+ m\left(r,\sum_{\nu=1}^{q}\frac{f'}{f-a_\nu}\right) + m\left(r,\frac{f'}{f}\right) + q\log^{+}\frac{2q}{\delta} \\
+ \log 2 + \log\frac{1}{|f'(0)|}.
\end{aligned}
\quad (1.3.14)
$$

1.3.3. 对数导数的基本引理

为了以后的应用，我们将证明定理 1.4 与定理 1.5 中的余项 $S(r,f)$ 在 r 趋于 R 时一般说来比 $T(r,f)$ 的增长缓慢．在定理 1.4 中，对于一个确定的函数 $f(z)$，$S(r,f)$ 里的后两项是常数，而前两项具有相同形式 $m\left(r,\frac{f'}{f}\right)$和 $m\left(r,\frac{(f-1)'}{f-1}\right)$，所以我们要研究 $m\left(r,\frac{f'}{f}\right)$的增长问题．

就一些具体的函数 $f(z)$ 来说，$m\left(r,\frac{f'}{f}\right)$的增长性比 $T(r,f)$低，这是容易置信的．例如当 $f(z)$为一个 k 次多项式 $P(z)$时，$T(r,P)=k\log r+O(1)$，而$m\left(r,\frac{P'}{P}\right)=0\quad(r>r_0)$．又如

$f(z)=e^z$，在 1.2.2 中已曾计算 $T(r,e^z)=\frac{r}{\pi}$，而 $m\left(r,\frac{(e^z)'}{e^z}\right)=0$. 但是要对任意亚纯函数证明这个结论却是一个深刻的事实. 它由下述 Nevanlinna 的基本引理所表达. 由于 $\frac{f'}{f}=(\log f)'$，所以也称为对数导数引理. 它在 Nevanlinna 第二基本定理里起着关键的作用. 这里采取了 G. Valiron[4] 改善后的形式，这种改善对于在正规族理论和 Borel 方向的应用来说是重要的.

引理 1.3. 设函数 $f(z)$ 于 $|z|<R(\leqslant\infty)$ 内亚纯. 若 $f(0)\neq 0,\infty$，则对于 $0<r<\rho<R$ 有

$$m\left(r,\frac{f'}{f}\right)<10+4\log^+\log^+\frac{1}{|f(0)|}+2\log^+\frac{1}{r}$$

$$+3\log^+\frac{1}{\rho-r}+4\log^+\rho+4\log^+T(\rho,f). \qquad (1.3.15)$$

证. 由于 $\frac{f'}{f}=(\log f)'$，为了获得 $m\left(r,\frac{f'}{f}\right)$ 的估计，我们从关于 $\log f$ 的 Poisson-Jensen 公式出发，然后取其导数加以估计. 设 $z=re^{i\theta}$，则

$$\log|f(z)|=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(\rho e^{i\varphi})|\frac{\rho^2-r^2}{\rho^2-2\rho r\cos(\varphi-\theta)+r^2}d\varphi$$

$$-\sum_{|a_\mu|<\rho}\log\left|\frac{\rho^2-\bar{a}_\mu z}{\rho(z-a_\mu)}\right|+\sum_{|b_\nu|<\rho}\log\left|\frac{\rho^2-\bar{b}_\nu z}{\rho(z-b_\nu)}\right|.$$

注意

$$\frac{\rho^2-r^2}{\rho^2-2\rho r\cos(\varphi-\theta)+r^2}=\mathrm{Re}\left(\frac{\rho e^{i\varphi}+z}{\rho e^{i\varphi}-z}\right),$$

即有

$$\log f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(\rho e^{i\varphi})|\frac{\rho e^{i\varphi}+z}{\rho e^{i\varphi}-z}d\varphi$$

$$-\sum\log\frac{\rho^2-\bar{a}_\mu z}{\rho(z-a_\mu)}+\sum\log\frac{\rho^2-\bar{b}_\nu z}{\rho(z-b_\nu)}+iC. \qquad (1.3.16)$$

对各项取导数得

$$\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(\rho e^{i\varphi})|\frac{2\rho e^{i\varphi}}{(\rho e^{i\varphi}-z)^2}d\varphi$$

$$-\sum\frac{|a_\mu|^2-\rho^2}{(z-a_\mu)(\rho^2-\bar{a}_\mu z)}+\sum\frac{|b_\nu|^2-\rho^2}{(z-b_\nu)(\rho^2-\bar{b}_\nu z)}.$$

当 $|z|=r$ 时

$$\left|\frac{|a_\mu|^2-\rho^2}{(z-a_\mu)(\rho^2-\bar{a}_\mu z)}\right|=\frac{\rho(\rho^2-|a_\mu|^2)}{|\rho^2-\bar{a}_\mu z|^2}\left|\frac{\rho^2-\bar{a}_\mu z}{\rho(z-a_\mu)}\right|$$

$$\leqslant\frac{\rho^3}{(\rho^2-\rho r)^2}\left|\frac{\rho^2-\bar{a}_\mu z}{\rho(z-a_\mu)}\right|=\frac{\rho}{(\rho-r)^2}\left|\frac{\rho^2-\bar{a}_\mu z}{\rho(z-a_\mu)}\right|.$$

同样有

$$\left|\frac{|b_\nu|^2-\rho^2}{(z-b_\nu)(\rho^2-\bar{b}_\nu z)}\right|\leqslant\frac{\rho}{(\rho-r)^2}\left|\frac{\rho^2-\bar{b}_\nu z}{\rho(z-b_\nu)}\right|.$$

于是

$$\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right|\leqslant\frac{2\rho}{(\rho-r)^2}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\log|f(\rho e^{i\varphi})|\right|d\varphi\right.$$

$$\left.+\sum\left|\frac{\rho^2-\bar{a}_\mu z}{\rho(z-a_\mu)}\right|+\sum\left|\frac{\rho^2-\bar{b}_\nu z}{\rho(z-b_\nu)}\right|\right\}.$$

但

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\log|f(\rho e^{i\varphi})|\right|d\varphi=m(\rho,f)+m\left(\rho,\frac{1}{f}\right)$$

$$\leqslant 2T(\rho,f)+\log\frac{1}{|f(0)|}.$$

因此

$$\log^+\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right|\leqslant\log^+\frac{2\rho}{(\rho-r)^2}+\log^+2T(\rho,f)$$

$$+\log^+\log^+\frac{1}{|f(0)|}+\sum\log^+\left|\frac{\rho^2-\bar{a}_\mu z}{\rho(z-a_\mu)}\right|$$

$$+\sum\log^+\left|\frac{\rho^2-\bar{b}_\nu z}{\rho(z-b_\nu)}\right|+\log\left\{n(\rho,f)+n\left(\rho,\frac{1}{f}\right)+2\right\}.$$

对于函数 $\dfrac{\rho^2-\bar{a}_\mu z}{\rho(z-a_\mu)}$ 应用 Jensen 公式有

$$\log\frac{\rho}{|a_\mu|}=m\left(r,\frac{\rho^2-\bar{a}_\mu z}{\rho(z-a_\mu)}\right)+\log^+\frac{r}{|a_\mu|}.$$

故

$$\sum m\left(r,\frac{\rho^2-\bar{a}_\mu z}{\rho(z-a_\mu)}\right)=\sum\log\frac{\rho}{|a_\mu|}-\sum\log^+\frac{r}{|a_\mu|}$$

$$=N\left(\rho,\frac{1}{f}\right)-N\left(r,\frac{1}{f}\right).$$

同样

$$\sum m\left(r,\frac{\rho^2-\bar{b}_\nu z}{\rho(z-b_\nu)}\right)=N(\rho,f)-N(r,f).$$

于是

$$m\left(r,\frac{f'}{f}\right)<2\log 2+\log^+\rho+2\log^+\frac{1}{\rho-r}$$

$$+\log^+T(\rho,f)+\log^+\log^+\frac{1}{|f(0)|}+N(\rho,f)$$

$$-N(r,f)+N\left(\rho,\frac{1}{f}\right)-N\left(r,\frac{1}{f}\right)$$

$$+\log\left\{n(\rho,f)+n\left(\rho,\frac{1}{f}\right)+2\right\}. \qquad (1.3.17)$$

为了估计 $n(\rho)=n(\rho,f)+n\left(\rho,\dfrac{1}{f}\right)$，记与 $n(\rho)$ 相应的密指量为 $N(\rho)$．我们取 ρ'，使 $\rho<\rho'<R$．由

$$N(\rho')\geqslant\int_\rho^{\rho'}\frac{n(t)dt}{t}\geqslant n(\rho)\frac{\rho'-\rho}{\rho'},$$

有

$$n(\rho)\leqslant\frac{\rho'}{\rho'-\rho}N(\rho')\leqslant\frac{\rho'}{\rho'-\rho}\left\{2T(\rho',f)\right.$$

$$\left.+\log^+\frac{1}{|f(0)|}\right\}.$$

于是

$$\log^+\{n(\rho)+2\}\leqslant \log^+\rho'+\log^+\frac{1}{\rho'-\rho}$$
$$+\log^+\log^+\frac{1}{|f(0)|}+\log^+T(\rho',f)+4\log 2. \quad (1.3.18)$$

为了估计 $N(\rho)-N(r)$，注意 $N(t)$ 是 $\log t$ 的凸函数，对于 $0<r<\rho<\rho'<R$ 有

$$\frac{N(\rho)-N(r)}{\log\rho-\log r}\leqslant\frac{N(\rho')-N(r)}{\log\rho'-\log r}.$$

即

$$N(\rho)-N(r)\leqslant\frac{\log\dfrac{\rho}{r}}{\log\dfrac{\rho'}{r}}N(\rho').$$

由

$$\log\frac{\rho}{r}=\int_r^\rho\frac{dt}{t}\leqslant\frac{\rho-r}{r},$$

$$\log\frac{\rho'}{r}=\int_r^{\rho'}\frac{dt}{t}\geqslant\frac{\rho'-r}{\rho'},$$

得

$$N(\rho)-N(r)\leqslant\frac{\rho'}{r}\cdot\frac{\rho-r}{\rho'-r}\left\{2T(\rho',f)+\log^+\frac{1}{|f(0)|}\right\}.$$

取 ρ 使得

$$\rho=r+\frac{r(\rho'-r)}{2\rho'\left\{T(\rho',f)+\log^+\dfrac{1}{|f(0)|}+1\right\}}, \quad (1.3.19)$$

则 $0<r<\rho<\rho'<R$，且

$$N(\rho)-N(r)<1. \quad (1.3.20)$$

由(1.3.19)有

$$\log^+\frac{1}{\rho-r}\leqslant\log^+\frac{1}{r}+\log^+\frac{1}{\rho'-r}+\log^+\rho'$$

$$+\log^+T(\rho',f)+\log^+\log^+\frac{1}{|f(0)|}+\log 6. \quad (1.3.21)$$

又由

$$\rho-r<\frac{\rho'-r}{2},$$

有

$$\rho'-\rho=(\rho'-r)-(\rho-r)>\frac{\rho'-r}{2}.$$

从而

$$\log^+\frac{1}{\rho'-\rho}<\log 2+\log^+\frac{1}{\rho'-r}. \quad (1.3.22)$$

将(1.3.18),(1.3.20),(1.3.21)代入(1.3.17),并计及(1.3.22)得

$$m\left(r,\frac{f'}{f}\right)<9\log 2+2\log 3+1+4\log^+\log^+\frac{1}{|f(0)|}$$

$$+2\log^+\frac{1}{r}+3\log^+\frac{1}{\rho'-r}+4\log^+\rho'+4\log^+T(\rho',f).$$

这就是引理的结论.

1.3.4. Borel 引理

在引理 1.3 关于 $m\left(r,\frac{f'}{f}\right)$ 的估计中具有项 $\log^+T(\rho,f)$，为了处理这一项，我们还需要关于单调函数的一个引理. 这个引理本质上是属于 Borel[1] 的.

引理 1.4. (1) 设 $T(r)$ 在 $r_0\leqslant r<\infty$ 是连续、非减函数，$T(r_0)\geqslant 1$，则除去 r 的一个集合 E_0 后恒有

$$T\left(r+\frac{1}{T(r)}\right)<2T(r), \quad (1.3.23)$$

且 E_0 的线性测度不超过 2.

(2) 设 $T(r)$ 在 $r_0\leqslant r<R<\infty$ 是连续、非减函数，$T(r_0)\geqslant 1$，则除去 r 的一个集合 E_0 后恒有

$$T\left(r+\frac{R-r}{eT(r)}\right)<2T(r), \tag{1.3.24}$$

且$\int_{E_0}\frac{dr}{R-r}\leqslant 2$.特别地若 $r_0<\rho<\rho'<R$ 与 $R-\rho'<\frac{R-\rho}{e^2}$,

则在区间 (ρ,ρ') 内必有 r 使 (1.3.24) 成立.

证. (1)倘若(1.3.23)式在 $r_0\leqslant r<\infty$ 恒成立,则引理中(1)的结论已经成立. 在相反的情况,记 E_0 为使(1.3.23)式不成立的 $r(\geqslant r_0)$的集合. 因为 $T(r)$ 是连续函数, E_0 显然是闭集.

记

$$r_1=\min E_0,\qquad r_1'=r_1+\frac{1}{T(r_1)},$$

$$r_2=\min\{E_0\cap[r_1',\infty)\},\quad r_2'=r_2+\frac{1}{T(r_2)},$$

$$\cdots\cdots$$

$$r_\nu=\min\{E_0\cap[r_{\nu-1}',\infty)\},\ r_\nu'=r_\nu+\frac{1}{T(r_\nu)},$$

$$\cdots\cdots$$

倘若存在无穷个 r_ν, 则 r_ν 不可能趋向于一个有穷的极限 τ. 因若不然,由于 $r_\nu<r_\nu'\leqslant r_{\nu+1}(\nu=1,2,\cdots)$, 则 r_ν' 也趋向于 τ. 但是对于所有的 ν 有

$$r_\nu'-r_\nu=\frac{1}{T(r_\nu)}\geqslant\frac{1}{T(\tau)}>0.$$

这便推得一矛盾,于是 $\lim\limits_{\nu\to\infty}r_\nu=\infty$. 从而 $E_0\subset\left\{\bigcup\limits_{\nu=1}^{\infty}[r_\nu,r_\nu']\right\}$. 故

$$\operatorname{mes}E_0\leqslant\sum_{\nu=1}^{\infty}(r_\nu'-r_\nu)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{T(r_\nu)}.$$

注意 $r_\nu(\nu=1,2,\cdots)$ 都属于 E_0, 因此

$$T(r_\nu)\geqslant T(r_{\nu-1}')\geqslant 2T(r_{\nu-1})\geqslant\cdots\geqslant 2^{\nu-1}T(r_1)\geqslant 2^{\nu-1}.$$

于是

$$\text{mes}E_0 \leqslant \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\nu-1}} = 2.$$

(2) 作适当的变数替换，使化为 (1) 的情况．事实上，仅须置

$$\rho = \log \frac{1}{R-r},\ r = R - e^{-\rho},\ \rho_0 = \log \frac{1}{R-r_0},$$

则 $T_1(\rho) = T(R - e^{-\rho})$ 就是在 $\rho_0 \leqslant \rho < \infty$ 上定义的函数．根据(1)，使

$$T_1\left(\rho + \frac{1}{T_1(\rho)}\right) \geqslant 2T_1(\rho)$$

成立的值 $\rho(\geqslant \rho_0)$ 构成集 E，其线性测度不超过 2．相应于 E 的 r 的集合记为 E_0，则

$$\int_{E_0} \frac{dr}{R-r} = \int_E d\rho \leqslant 2.$$

当 $r \bar{\in} E_0$ 时有

$$T(r') < 2T(r),$$

其中

$$\log \frac{1}{R-r'} = \log \frac{1}{R-r} + \frac{1}{T(r)}.$$

即

$$r' = R - (R-r)e^{-\frac{1}{T(r)}} = r + (R-r)\{1 - e^{-\frac{1}{T(r)}}\}.$$

计及

$$1 - e^{-\frac{1}{T(r)}} = \int_0^{\frac{1}{T(r)}} \frac{dx}{e^x} \geqslant \frac{\frac{1}{T(r)}}{e^{\frac{1}{T(r)}}} \geqslant \frac{1}{eT(r)},$$

则

$$r' \geqslant r + \frac{R-r}{eT(r)}.$$

当 $R - \rho' < \dfrac{R-\rho}{e^2}$ 时，有

$$\int_{\rho}^{\rho'} \frac{dt}{R-t} = \log \frac{R-\rho}{R-\rho'} > 2.$$

于是在区间 (ρ, ρ') 内存在值 r 不属于 E_0，即

$$T\left(r + \frac{R-r}{eT(r)}\right) < 2T(r).$$

1.3.5. 第二基本定理的余项

应用引理 1.3 和引理 1.4，我们可以对第二基本定理的余项进行讨论.

定理 1.6. 设 $f(z)$在开平面亚纯[1]，不蜕化为常数，$S(r, f)$ 由定理 1.4 中的(1.3.4)或定理 1.5 的(1.3.9)确定. 则当 $f(z)$ 为有穷级时有

$$S(r, f) = O(\log r), \qquad (r \to \infty); \quad (1.3.25)$$

当 $f(z)$ 为无穷级时有

$$S(r, f) = O\{\log(rT(r, f))\}, \qquad (r \to \infty), \quad (1.3.26)$$

可能须除去一个集合 E，其线性测度为有穷[2].

证. 我们仅考虑定理 1.5 中的余项，至于定理 1.4 中的余项形式更为简单，完全有相同的结论.

若记

$$\varphi(z) = \prod_{\nu=1}^{q} (f(z) - a_\nu),$$

则

$$S(r, f) = m\left(r, \frac{f'}{f}\right) + m\left(r, \frac{\varphi'}{\varphi}\right) + O(1).$$

当 $f(z)$ 的级 λ 为有穷时，

$$T(r, f) < r^{\lambda+1}, \qquad (r > r_0).$$

而

1) $f(z)$ 在开平面亚纯系指 $f(z)$ 在 $|z| < \infty$ 亚纯，有时简称为亚纯函数.

2) 由引理 1.4 的证明，或者说可能须除去一列总幅长为有穷的例外区间.

$$T(r,\varphi)\leqslant\sum_{\nu=1}^{q}T(r,f-a_\nu)\leqslant qT(r,f)+O(1).$$

在引理 1.3 中取 $\rho=2r$，则

$$m\left(r,\frac{f'}{f}\right)=O(\log r),\ m\left(r,\frac{\varphi'}{\varphi}\right)=O(\log r),(r\to\infty).$$

从而

$$S(r,f)=O(\log r),\qquad (r\to\infty).$$

当 $f(z)$ 为无穷级时，存在 r_0 使 $T(r_0,f)\geqslant 1$，$T(r_0,\varphi)\geqslant 1$。由引理 1.4，相应于 $T(r,f)$ 与 $T(r,\varphi)$ 的除外值集分别为 E_1，E_2，则 $\operatorname{mes}E_j\leqslant 2(j=1,2)$。当 $r\bar{\in}(E_1\cup E_2)$，取 $\rho=r+\dfrac{1}{T(r,f)}$，有

$$m\left(r,\frac{f'}{f}\right)=O\{\log(rT(r,f))\},$$

$$m\left(r,\frac{\varphi'}{\varphi}\right)=O\{\log(rT(r,f))\},\qquad (r\to\infty).$$

从而

$$S(r,f)=O\{\log(rT(r,f))\},\qquad (r\to\infty),$$

除去 r 的一个集合，其线性测度不超过 4.

由于当 a_ν 为有穷，且 $f(0)\neq a_\nu$ 时有

$$m\left(r,\frac{1}{f-a_\nu}\right)=T(r,f-a_\nu)-N\left(r,\frac{1}{f-a_\nu}\right)$$

$$+\log\frac{1}{|f(0)-a_\nu|}\leqslant T(r,f)+\log^+|a_\nu|+\log 2$$

$$-N\left(r,\frac{1}{f-a_\nu}\right)+\log\frac{1}{|f(0)-a_\nu|}.$$

于是定理 1.5 也可以叙述为

定理 1.5'. 设函数 $f(z)$ 于开平面亚纯，不蜕化为常数. 又设 $a_\nu(\nu=1,2,\cdots,q)$ 为 $q(\geqslant 3)$ 个判别[1]的复数(其中可以有一个复

---

1) 即 $a_\nu(\nu=1,2,\cdots,q)$ 中两两不相等.

数等于无穷)，则

$$(q-2)T(r,f)<\sum_{\nu=1}^{q} N\left(r,\frac{1}{f-a_\nu}\right)-N_1(r)+S(r,f).$$

这里 $N_1(r)$ 仍如(1.3.3)式表示，$S(r,f)$ 具有定理 1.6 中所表述的余项的性质.

§ 1.4. 第二基本定理的应用

1.4.1. Picard-Borel 定理

为了从第二基本定理导出 Picard 定理，我们先注意下述事实.

引理 1.5. 设 $f(z)$ 为开平面上的超越亚纯函数[1]，则

$$\varlimsup_{r\to\infty}\frac{T(r,f)}{\log r}=\infty. \tag{1.4.1}$$

证. 设若不然，即存在一个适当大的正数M和一列趋于无穷的正数 r_ν，使 $\lim\limits_{\nu\to\infty}\dfrac{T(r_\nu,f)}{\log r_\nu}<M$. 由 Nevanlinna 第一基本定理有

$$\lim_{\nu\to\infty}\frac{N(r_\nu,f)}{\log r_\nu}<M,\ \lim_{\nu\to\infty}\frac{N\left(r_\nu,\frac{1}{f}\right)}{\log r_\nu}<M.$$

于是在开平面上 $f(z)$的零点数目和极点数目都不超过M. 作有理函数 $R(z)$，使与 $f(z)$ 有相同的零点、极点、重级也相同，则

$\dfrac{f(z)}{R(z)}=e^{g(z)}$，其中 $g(z)$ 为整函数.

由于 $R(z)$ 是有理函数，故 $T(r,R)=O(\log r)$. 于是

$$T\left(r_\nu,\frac{f}{R}\right)\leqslant T(r_\nu,f)+T(r_\nu,R)+O(1)=O(\log r_\nu).$$

1) 开平面上的超越亚纯函数系指不蜕化为有理函数的亚纯函数.

从而

$$\log M\left(r_\nu, \frac{f}{R}\right) \leqslant \frac{2r_\nu + r_\nu}{2r_\nu - r_\nu} T\left(2r_\nu, \frac{f}{R}\right) = O(\log r_\nu).$$

因此对于 $|z| = r_\nu$ 上的任意点 z 恒有

$$\operatorname{Re} g(z) = \log\left|\frac{f(z)}{R(z)}\right| = O(\log r_\nu).$$

应用推广的 Liouville 定理(参阅 Titchmarsh [1]86—87) 可知, $g(z)$ 为常数,即 $f(z)$ 为有理函数,与引理假设矛盾.

现在我们有以下的 Picard 定理.

定理 1.7. 设 $f(z)$ 为开平面上的超越亚纯函数,则 $f(z)$ 取任意复数无穷多次,至多可能有两个例外值.

证. 若定理结论不成立,即存在三个判别的复数 $a_\nu(\nu = 1, 2, 3)$ 使 $f(z) = a_\nu$ 只有有穷个根. 从而

$$N(r, a_\nu) = O(\log r), \qquad (\nu = 1, 2, 3).$$

命

$$g(z) = \frac{f(z) - a_1}{f(z) - a_3} \cdot \frac{a_2 - a_3}{a_2 - a_1}, \tag{1.4.2}$$

则

$$N\left(r, \frac{1}{g}\right) + N\left(r, \frac{1}{g-1}\right) + N(r, g) = O(\log r).$$

对 $g(z)$ 及 $0, 1, \infty$ 应用定理 1.4, 并计及定理 1.6 得

$$T(r, g) = O\{\log(rT(r, g))\},$$

至多可能除去一个线性测度不超过 4 的集合. 于是

$$\varliminf_{r \to \infty} \frac{T(r, g)}{\log r} < \infty.$$

根据引理 1.5, $g(z)$ 为有理函数,因此 $f(z)$ 也是有理函数,这便与定理假设相矛盾.

定义 1.7. 设函数 $f(z)$ 于开平面亚纯, a 为任一复数. a 称为 $f(z)$ 的 Picard 例外值,若 $f(z) - a$ 没有零点.

由定理 1.7 可知,超越亚纯函数的 Picard 例外值至多只有两

个. 上界 2 是精确的,例如e^z有两个 Picard 例外值 0, ∞, 而对于任意有穷非零复数 a, e^z-a 都有无穷多个零点.

应用 R. Nevanlinna 第二基本定理, 还可立即导得 Borel 定理. 为此先引进 Borel 例外值的概念.

定义 1.8. 设$f(z)$为于开平面亚纯的函数,级 λ 为有穷正数, a 为任一复数. a 称为 $f(z)$ 的 Borel 例外值,若

$$\varlimsup_{r\to\infty}\frac{\log n(r,f=a)}{\log r}<\lambda. \tag{1.4.3}$$

引理 1.6. 设函数$f(z)$于开平面亚纯,级 λ 为有穷正数,则$f(z)$以某复数 a 为 Borel 例外值的必要且充分的条件是

$$\varlimsup_{r\to\infty}\frac{\log N(r,f=a)}{\log r}<\lambda.$$

证. 由

$$n(r,f=a)\leqslant\frac{n(r,f=a)}{\log 2}\int_r^{2r}\frac{dt}{t}\leqslant\frac{1}{\log 2}N(2r,f=a)\quad(r\geqslant 1)$$

与

$$N(r,f=a)-N(r_0,f=a)=\int_{r_0}^{r}\frac{n(t,f=a)dt}{t}$$

$$\leqslant n(r,f=a)\log\frac{r}{r_0}$$

易知

$$\varlimsup_{r\to\infty}\frac{\log N(r,f=a)}{\log r}=\varlimsup_{r\to\infty}\frac{\log n(r,f=a)}{\log r}.$$

于是引理的结论可立即从定义得到.

定理 1.8. 设函数$f(z)$于开平面亚纯,级 λ 为有穷正数,则$f(z)$的 Borel 例外值至多有两个.

证. 假设定理结论不成立,则存在三个判别的复数 $a_\nu(\nu=1,2,3)$, 使得 $f(z)$ 以 a_ν 为 Borel 例外值. 根据引理 1.6, 则有

$$\varlimsup_{r\to\infty}\frac{\log N(r,f=a_\nu)}{\log r}<\lambda,\qquad(\nu=1,2,3).$$

无妨设 $a_\nu(\nu=1,2,3)$为 $0,1,\infty$，否则作变换(1.4.2)即可化为所述情况．对 $f(z)$ 以及 $0,1,\infty$ 应用定理 1.4 与定理 1.6，注意到 $f(z)$ 为有穷级，则

$$T(r,f) < \sum_{\nu=1}^{3} N(r,f=a_\nu) + O(\log r).$$

于是

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log T(r,f)}{\log r} < \lambda.$$

这与 $f(z)$的级为 λ 相矛盾．

显然 $f(z)$ 的 Picard 例外值必为它的 Borel 例外值，于是在有穷正级时，Borel 定理发展了 Picard 定理．

1.4.2. 亏量关系

Nevanlinna 第二基本定理不仅包含了 Picard-Borel 定理，而且从它可以引出亏值、亏量的概念，得到重要的亏量关系．

定义 1.9. 设 $f(z)$为开平面上的超越亚纯函数，a 为任一复数．定义 a 对于 $f(z)$ 的亏量(或简称为亏量)为

$$\delta(a,f) = \underline{\lim_{r\to\infty}} \frac{m\left(r,\dfrac{1}{f-a}\right)}{T(r,f)} = 1 - \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{N\left(r,\dfrac{1}{f-a}\right)}{T(r,f)}. \tag{1.4.4}$$

容易看出 $0 \leqslant \delta(a,f) \leqslant 1$.

定义 1.10. 复数 a 称为亚纯函数 $f(z)$ 的亏值，若其亏量大于 0．它也称为 Nevanlinna 例外值．

粗略地说，a 是 $f(z)$ 的亏值是指，在开平面上 $f(z)-a$ 的零点比较"稀少"．它是 Picard 例外值和 Borel 例外值的发展，不过一般说来更加精确．

定理 1.9. 设 $f(z)$ 为开平面上的超越亚纯函数，则 $f(z)$ 的亏值至多为一可数集，且

$$\sum\delta(a,f) \leqslant 2 \tag{1.4.5}$$

证. 若 $a_\nu(\nu=1,2,\cdots,q)$ 为一组互相判别的复数,则由定理 1.5 有

$$\varliminf_{r\to\infty}\left\{\sum_{\nu=1}^{q}\frac{m\left(r,\dfrac{1}{f-a_\nu}\right)}{T(r,f)}\right\}\leqslant\varlimsup_{r\to\infty}\frac{2T(r,f)}{T(r,f)}+\varliminf_{r\to\infty}\frac{S(r,f)}{T(r,f)}.$$

于是

$$\sum_{\nu=1}^{q}\delta(a_\nu,f)\leqslant\varliminf_{r\to\infty}\left\{\frac{\sum_{\nu=1}^{q}m\left(r,\dfrac{1}{f-a_\nu}\right)}{T(r,f)}\right\}\leqslant 2.$$

从而对于任意正整数 j,使得亏量大于 $1/j$ 的亏值少于 $2j$ 个. 但是

$$E\{a:\delta(a,f)>0\}=\bigcup_{j=1}^{\infty}E\left\{a:\delta(a,f)>\frac{1}{j}\right\}.$$

因此 $f(z)$ 的亏值至多为一可数集.在 $f(z)$ 的亏值中任意取有限个 $a_\nu(\nu=1,2,\cdots,q)$都有 $\sum_{\nu=1}^{q}\delta(a_\nu,f)\leqslant 2$. 从而所有亏值的亏量总和不超过 2.

亏量总和的上界 2 是可以达到的. 例如对于 e^z 有

$$\delta(0,e^z)+\delta(\infty,e^z)=2.$$

当 $f(z)$ 为超越整函数时,显然 $\delta(\infty,f)=1$,于是

$$\sum_{a\neq\infty}\delta(a,f)\leqslant 1. \tag{1.4.6}$$

设 $f(z)$ 为开平面上的超越亚纯函数. 若 a 是 $f(z)$ 的 Picard 例外值,则 a 必为 $f(z)$的亏值,且 $\delta(a,f)=1$. 于是定理 1.9 包含了定理 1.7.

注.事实上,亏值最初是由 Collingwood 引进的,但是 Collingwood 赖以引进亏值的不等式(定理 1.5)是 Nevanlinna 基本不等式(定理 1.4)的推广. 所以通常还是将亏值称为 Nevanlinna 例外值.

在获得 Picard 定理与亏量关系(定理 1.7 与定理 1.9)时,我们都假定了函数 $f(z)$ 是超越的. 当 $f(z)$ 为有理函数时,相应的结

论（定理1.7的结论须改变为取到任意复数）也可用类似的方法证明，只要注意到 $f(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}$，则

$$m\left(r,\frac{f'}{f}\right)\leqslant m\left(r,\frac{P'}{P}\right)+m\left(r,\frac{Q'}{Q}\right)=0\quad(r\to\infty).$$

于是这时 R. Nevanlinna 第二基本定理的余项有 $S(r,f)=O(1)$.

当然，在有理函数这种简单情况，用直接验算的办法还可以得到更强的结论.

设 $f(z)$ 为有理函数，则 $f(z)$ 能取到任意复数，至多有一个 Picard 例外值. 并且 $f(z)$ 有且仅有一个亏值.

1.4.3. 重值

现在我们来推导 Nevanlinna 第二基本定理的另一形式.

设函数 $f(z)$ 于 $|z|<R(\leqslant\infty)$ 内亚纯，a 为任意有穷复数，对于 $0<r<R$，以 $\bar{n}(r,f=a)$ 表示在 $|z|\leqslant r$ 内，$f(z)-a$ 的零点数，每个零点仅计一次，它有时也记为 $\bar{n}\left(r,\dfrac{1}{f-a}\right)$ 或 $\bar{n}(r,a)$. 又记

$$\bar{n}(0,f=a)=\begin{cases}0, & 若\ f(0)\neq a,\\ 1, & 若\ f(0)=a.\end{cases}$$

置

$$\overline{N}(r,f=a)=\int_0^r\frac{\bar{n}(t,f=a)-\bar{n}(0,f=a)}{t}dt+\bar{n}(0,f=a)\log r,$$

称之为 $f(z)-a$ 的精简密指量，或记为 $\overline{N}\left(r,\dfrac{1}{f-a}\right)$，$\overline{N}(r,a)$. 类似地有 $\bar{n}(r,f=\infty)$（或 $\bar{n}(r,f)$，$\bar{n}(r,\infty)$）以及 $\overline{N}(r,f=\infty)$（或 $\overline{N}(r,f)$，$\overline{N}(r,\infty)$）.

由定理 1.5′，若 $a_\nu(\nu=1,2,\cdots,q)$为一组判别的复数，则

$$(q-2)T(r,f)<\sum_{\nu=1}^{q}N\left(r,\frac{1}{f-a_\nu}\right)-N_1(r)+S_1(r,f),$$

其中 $S_1(r,f)$ 具有定理 1.6 所述的余项性质.

我们来讨论 $N_1(r)$ 的性质.

$$N_1(r)=2N(r,f)-N(r,f')+N\left(r,\frac{1}{f'}\right).$$

记

$$2N(r,f)-N(r,f')=\int_0^r\frac{n_1(t,f=\infty)-n_1(0,f=\infty)}{t}dt$$

$$+n_1(0,f=\infty)\log r,$$

它是重级极点的密指量,其中 $n_1(t,f=\infty)=2n(t,f)-n(t,f')$. 若 $f(z)$ 在 z_0 处有一个 k 重极点,则 $n_1(r,f=\infty)$ 在 z_0 处计算 $k-1$ 次. 又若 a 是一有穷复数, $f(z)-a$ 在 z_0 处有一个 k 重零点, 则 $n\left(r,\frac{1}{f'}\right)$ 在 z_0 处计算 $k-1$ 次. 于是记

$$n_1(t)=n_1(t,f=\infty)+n\left(t,\frac{1}{f'}\right).$$

与 $N_1(r)=\int_0^r\frac{n_1(t)-n_1(0)}{t}dt+n_1(0)\log r$, 它是重级值点密指量.对于任意复数 a (有穷或否), 若 $f(z)-a$ 在 z_0 处有一个 k 重零点,则 $n_1(t)$ 在 z_0 处计算 $k-1$ 次. 于是

$$\sum_{\nu=1}^{q}N\left(r,\frac{1}{f-a_\nu}\right)-N_1(r)\leqslant\sum_{\nu=1}^{q}\overline{N}\left(r,\frac{1}{f-a_\nu}\right).$$

从而 Nevanlinna 第二基本定理可以写为

$$(q-2)T(r,f)<\sum_{\nu=1}^{q}\overline{N}\left(r,\frac{1}{f-a_\nu}\right)+S_1(r,f).\quad(1.4.7)$$

定义 1.11. 设 $f(z)$ 为开平面上的超越亚纯函数, a 为任意复数. 定义

$$\Theta(a,f)=1-\varlimsup_{r\to\infty}\frac{\overline{N}(r,a)}{T(r,f)},$$

$$\theta(a,f)=\varliminf_{r\to\infty}\frac{N(r,a)-\overline{N}(r,a)}{T(r,f)}.$$

由(1.4.7)以及

$$\delta(a,f)+\theta(a,f)=\varliminf_{r\to\infty}\frac{m(r,a)}{T(r,f)}+\varliminf_{r\to\infty}\frac{N(r,a)-\overline{N}(r,a)}{T(r,f)}$$

$$\leqslant\varliminf_{r\to\infty}\frac{m(r,a)+N(r,a)-\overline{N}(r,a)}{T(r,f)}=\Theta(a,f),$$

我们有

定理 1.10. 设 $f(z)$ 为开平面上的超越亚纯函数，则使 $\Theta(a,f)>0$ 的值 a 至多是可数的，并且

$$\sum_a\{\delta(a,f)+\theta(a,f)\}\leqslant\sum_a\Theta(a,f)\leqslant 2. \qquad (1.4.8)$$

定义 1.12. 若 $f(z)-a$ 的零点（当 a 为 ∞ 时，则相应地为极点）的重级均 $\geqslant 2$，则称 a 是 $f(z)$ 的一个完全重值.

系 1. 在定理 1.10 假设下，$f(z)$ 的完全重值至多有 4 个.

事实上，若 a 是 $f(z)$ 的完全重值，则

$$\Theta(a,f)=1-\varlimsup_{r\to\infty}\frac{\overline{N}(r,a)}{T(r,f)}$$

$$\geqslant 1-\varlimsup_{r\to\infty}\frac{\overline{N}(r,a)}{N(r,a)}\geqslant\frac{1}{2}. \qquad (1.4.9)$$

于是由 (1.4.8) 式可知 $f(z)$ 的完全重值至多有 4 个.

系 2. 设 $f(z)$ 为一超越整函数，则 $f(z)$ 有穷的完全重值至多有两个.

事实上，对于整函数 $f(z)$ 有

$$\sum_{a\neq\infty}\Theta(a,f)\leqslant 1. \qquad (1.4.10)$$

结合 (1.4.9)，立即有系 2 结论.

系 1 和系 2 的结论都是精确的. 例如 Weierstrass 椭圆函数 $\wp(z)$ 于开平面亚纯，它满足函数方程

$$\wp'(z)^2=\{\wp(z)-a_1\}\{\wp(z)-a_2\}\{\wp(z)-a_3\}, \qquad (1.4.11)$$

其中 a_1,a_2,a_3 是互相判别的有穷复数. 显然当 $\wp(z)=a_\nu(\nu=1,2,3)$ 时有 $\wp'(z)=0$，于是 $a_\nu(\nu=1,2,3)$是 $\wp(z)$ 的完全重

值．从(1.4.11)还可以看出 $\mathfrak{P}(z)$ 仅有二级极点，因此∞也是 $\mathfrak{P}(z)$ 的完全重值．

$\sin z$ 是一个整函数，1 和 -1 是它的两个完全重值．因为当 $\sin z = \pm 1$ 时，显然其导数 $\cos z = 0$.

系 3. 设 $f(z)$ 为开平面上的超越亚纯函数．又设 $a_\nu(\nu = 1, 2, \cdots, p)$ 为一组判别的复数，$l_\nu(\nu = 1,2,\cdots,p)$ 为大于 1 的整数．若 $f(z) - a_\nu(\nu = 1,2,\cdots,p)$ 的零点重级均 $\geqslant l_\nu$，则

$$\sum_{\nu=1}^{p}\left(1-\frac{1}{l_\nu}\right)\leqslant 2. \tag{1.4.12}$$

§ 1.5. 第二基本定理的推广

在本节里，我们考虑将第二基本定理中的常数易为函数的推广．

1.5.1. 某些特殊结果

R. Nevanlinna[2] 曾经在含有三项密指量的第二基本定理（定理 1.4）中将常数易为增长性较低的函数．他建立了

定理 1.11. 设函数 $f(z)$ 与 $\varphi_\nu(z)(\nu = 1,2,3)$ 在开平面亚纯，且

$$T(r, \varphi_\nu) = o\{T(r, f)\} \qquad (\nu = 1,2,3),$$

则

$$\{1 - o(1)\}T(r, f) < \sum_{\nu=1}^{3} N\left(r, \frac{1}{f-\varphi_\nu}\right) + S(r, f), \tag{1.5.1}$$

其中 $S(r, f)$ 具有定理 1.6 所述的通常余项的性质．

事实上，若命

$$g(z) = \frac{f(z) - \varphi_1(z)}{f(z) - \varphi_3(z)} \cdot \frac{\varphi_2(z) - \varphi_3(z)}{\varphi_2(z) - \varphi_1(z)}, \tag{1.5.2}$$

则由定理 1.4 得

$$T(r,g) < N(r,g) + N\left(r,\frac{1}{g}\right) + N\left(r,\frac{1}{g-1}\right) + S(r,g). \tag{1.5.3}$$

由 (1.5.2) 有

$$\frac{1}{f-\varphi_3} = \frac{1}{\varphi_3-\varphi_1}\left(\frac{\varphi_2-\varphi_1}{\varphi_2-\varphi_3}g-1\right).$$

于是

$$\begin{aligned} T(r,f) &\leqslant T(r,f-\varphi_3) + T(r,\varphi_3) + \log 2 \\ &\leqslant T\left(r,\frac{1}{f-\varphi_3}\right) + o(T(r,f)) \\ &\leqslant T(r,g) + o(T(r,f)). \end{aligned}$$

从而

$$(1-o(1))T(r,f) < T(r,g).$$

由 (1.5.2) 易知

$$\begin{aligned} &N(r,g) + N\left(r,\frac{1}{g}\right) + N\left(r,\frac{1}{g-1}\right) \\ &\leqslant \sum_{\nu=1}^{3} N\left(r,\frac{1}{f-\varphi_\nu}\right) + N\left(r,\frac{1}{\varphi_2-\varphi_1}\right) \\ &\quad + N\left(r,\frac{1}{\varphi_2-\varphi_3}\right) + N\left(r,\frac{1}{\varphi_1-\varphi_3}\right) \\ &\leqslant \sum_{\nu=1}^{3} N\left(r,\frac{1}{f-\varphi_\nu}\right) + o\{T(r,f)\}. \end{aligned}$$

这样由 (1.5.3) 即有 (1.5.1).

此外根据 (1.5.2) 式有

$$g(z) = \frac{\varphi_2-\varphi_3}{\varphi_2-\varphi_1}\left\{\frac{\varphi_3-\varphi_1}{f-\varphi_3}+1\right\},$$

故

$$T(r,g) \leqslant \{1+o(1)\}T(r,f).$$

当 $f(z)$ 为有穷级时，$g(z)$ 亦为有穷级，于是 (1.5.3) 式中的余项 $S(r,g) = O(\log r)$. 当 $f(z)$ 为无穷级时，$g(z)$ 亦为无

穷级，$S(r,g)=O\{\log(rT(r,g))\}=O\{\log(rT(r,f))\}$，除去一个测度为有穷的集合.

基于定理 1.11，R. Nevanlinna 曾提出在第二基本定理的一般形式（定理 1.5）中，是否可以把常数都替换为增长性较慢的函数．他还指出把常数替换为多项式是不难做到的，但是要替换为一般函数，则十分困难．

一些特殊情况曾先后为 J. Dufresnoy[1]、熊庆来[4]所研究，例如 J. Dufresnoy 曾得到

定理 1.12. 设函数 $f(z)$ 于开平面亚纯，不蜕化为有理函数．若 $P_\nu(z)(\nu=1,2,\cdots,q)$ 为 q 个次数不超过 d 的多项式，互相判别，则对于 $0<r<\infty$ 有

$$(q-d-2)T(r,f)<\sum_{\nu=1}^{q}N\left(r,\frac{1}{f-P_\nu}\right)+S(r,f). \tag{1.5.4}$$

这里 $S(r,f)$ 具有通常余项的性质．

在证明定理 1.12 前，我们注意一个事实．

引理 1.6. 设函数 $f(z)$ 于开平面超越亚纯，则对于任意正整数 k 有

$$m\left(r,\frac{f^{(k)}}{f}\right)=S(r,f). \tag{1.5.5}$$

其中 $S(r,f)$ 表示具有定理 1.6 中性质的量．

证．当 $k=1$ 时，由定理 1.6 中的论证，引理结论显然成立．设 (1.5.5) 式在 $k=l$ 时已经成立，我们欲证它在 $k=l+1$ 时也成立．

由于 $n(r,f^{(l)})=n(r,f)+l\bar{n}(r,f)\leqslant(l+1)n(r,f)$，故

$$\begin{aligned}T(r,f^{(l)})&=m(r,f^{(l)})+N(r,f^{(l)})\\&\leqslant m(r,f)+m\left(r,\frac{f^{(l)}}{f}\right)+N(r,f^{(l)})\\&\leqslant(l+1)T(r,f)+S(r,f).\end{aligned}$$

于是当 $f(z)$ 为有穷级时，$f^{(l)}(z)$ 也是有穷级[1]，从而

$$m\left(r, \frac{f^{(l+1)}}{f^{(l)}}\right) = O(\log r).$$

当 $f(z)$ 为无穷级时，

$$m\left(r, \frac{f^{(l+1)}}{f^{(l)}}\right) = O\{\log(rT(r, f^{(l)}))\} = O\{\log(rT(r, f))\},$$

至多除去一个线性测度为有穷的集合．因此

$$m\left(r, \frac{f^{(l+1)}}{f}\right) \leqslant m\left(r, \frac{f^{(l)}}{f}\right) + m\left(r, \frac{f^{(l+1)}}{f^{(l)}}\right) = S(r, f).$$

现在我们证明定理 1.12. 考虑

$$F(z) = \sum_{\nu=1}^{q} \frac{1}{f(z) - P_\nu(z)}.$$

$m(r, F)$ 的下界可如同定理 1.5 得到，(参阅以下定理 1.13 证明的前半部分)有

$$\begin{aligned} m(r, F) \geqslant & \sum_{\nu=1}^{q} m\left(r, \frac{1}{f - P_\nu}\right) - q \sum_{1 \leqslant \nu_1 < \nu_2 \leqslant q} m\left(r, \frac{1}{P_{\nu_1} - P_{\nu_2}}\right) \\ & - q\log\{2q + q^2(q-1)\} - \log 2 \\ \geqslant & \sum_{\nu=1}^{q} m\left(r, \frac{1}{f - P_\nu}\right) - O(\log r). \end{aligned}$$

另一方面

$$\begin{aligned} m(r, F) & \leqslant m(r, f^{(d+1)}F) + m\left(r, \frac{1}{f^{(d+1)}}\right) \\ & \leqslant m(r, f^{(d+1)}F) + T(r, f^{(d+1)}) \\ & \quad - N\left(r, \frac{1}{f^{(d+1)}}\right) + \log\frac{1}{|f^{(d+1)}(0)|}. \end{aligned}$$

注意到

$$\begin{aligned} T(r, f^{(d+1)}) & = m(r, f^{(d+1)}) + N(r, f^{(d+1)}) \\ & \leqslant m(r, f) + m\left(r, \frac{f^{(d+1)}}{f}\right) \end{aligned}$$

1) 在 § 4.1 我们将证明 $f(z)$ 与 $f^{(l)}(z)$ 有相同的级.

$$+N(r,f)+(d+1)\overline{N}(r,f)$$
$$\leqslant (d+2)T(r,f)+m\left(r,\frac{f^{(d+1)}}{f}\right).$$

比较 $m(r,F)$ 的下界与上界，并计及引理 1.6 即得 (1.5.4) 式.

1.5.2. 庄圻泰的不等式

对于上述 R. Nevanlinna 提出的一般问题，庄圻泰[5]曾进行了研究. 特别地在整函数的情况，问题已获彻底解决.

定理 1.13. 设函数 $f(z)$ 与 $\varphi_\nu(z)(\nu=1,2,\cdots,q)$ 于开平面亚纯. $\varphi_\nu(z)(\nu=1,2,\cdots,q)$ 互相判别且

$$T(r,\varphi_\nu)=o\{T(r,f)\} \qquad (\nu=1,2,\cdots,q).$$

则

$$\{q-1-o(1)\}T(r,f)<\sum_{\nu=1}^{q}N\left(r,\frac{1}{f-\varphi_\nu}\right)$$
$$+q\overline{N}(r,f)+S(r,f). \quad (1.5.6)$$

这里

$$S(r,f)=O\{\log(rT(r,f))\},$$

当 $f(z)$ 为无穷级时，可能须除去一列总幅长为有穷的例外区间.

证. 我们可以找到 $p(\leqslant q)$ 个线性无关的亚纯函数 $\psi_j(z)$ $(j=1,2,\cdots,p)$使得

$$T(r,\psi_j)=o\{T(r,f)\} \qquad (j=1,2,\cdots,p)$$

以及

$$\varphi_\nu(z)=\sum_{j=1}^{p}c_{\nu j}\psi_j(z) \qquad (\nu=1,2,\cdots,q),$$

其中 $c_{\nu j}$ 都是常数.

事实上，当 $\varphi_\nu(z)(\nu=1,2,\cdots,q)$ 线性无关时，取

$$\psi_j(z)=\varphi_j(z) \qquad (j=1,2,\cdots,q)$$

即可. 当 $\varphi_\nu(z)(\nu=1,2,\cdots,q)$线性相关时，其中存在 $l(<q)$ 个是线性无关的. 这时把这 l 个线性无关的函数取为 $\psi_j(z)$.

如同定理 1.5 的证明，置

$$F(z)=\sum_{\nu=1}^{q}\frac{1}{f(z)-\varphi_\nu(z)},$$

然后寻求 $m(r, F)$ 的下界与上界.

求 $m(r, F)$的下界的方法与定理 1.5 是类似的. 对于每个 r,置

$$\delta(\theta)=\min_{1\leqslant\nu_1<\nu_2\leqslant q}\{|\varphi_{\nu_1}(re^{i\theta})-\varphi_{\nu_2}(re^{i\theta})|, 1\}$$
$$(0\leqslant\theta<2\pi).$$

再以 E_j 表示 $[0, 2\pi)$ 上使得

$$|f(re^{i\theta})-\varphi_j(re^{i\theta})|<\frac{\delta(\theta)}{2q}$$

成立的θ值的集合. 在 E_j 上,当 $\nu\neq j$ 时有

$$|f(re^{i\theta})-\varphi_\nu(re^{i\theta})|\geqslant|\varphi_j(re^{i\theta})-\varphi_\nu(re^{i\theta})|$$
$$-|f(re^{i\theta})-\varphi_j(re^{i\theta})|>\delta(\theta)-\frac{\delta(\theta)}{2q}\geqslant\frac{3}{4}\delta(\theta).$$

由

$$F(re^{i\theta})=\frac{1}{f(re^{i\theta})-\varphi_j(re^{i\theta})}$$
$$\times\left\{1+\sum_{\nu\neq j}\frac{f(re^{i\theta})-\varphi_j(re^{i\theta})}{f(re^{i\theta})-\varphi_\nu(re^{i\theta})}\right\},$$

有

$$|F(re^{i\theta})|>\frac{1}{|f(re^{i\theta})-\varphi_j(re^{i\theta})|}$$
$$\times\left\{1-(q-1)\frac{\dfrac{\delta(\theta)}{2q}}{\delta(\theta)\left(1-\dfrac{1}{2q}\right)}\right\}$$
$$>\frac{1}{2|f(re^{i\theta})-\varphi_j(re^{i\theta})|}.$$

于是当 $\theta\in E_j$ 时,有 $\theta\bar{\in}E_\nu(\nu\neq j)$,从而

$$\log|F(re^{i\theta})| > \log\frac{1}{|f(re^{i\theta})-\varphi_j(re^{i\theta})|} - \log 2$$

$$\geqslant \sum_{\nu=1}^{q}\log^+\frac{1}{|f(re^{i\theta})-\varphi_\nu(re^{i\theta})|}$$

$$- q\log^+\frac{2q}{\delta(\theta)} - \log 2. \tag{1.5.7}$$

显然当 $\theta \bar{\in} \left(\bigcup_{j=1}^{q} E_j\right)$ 时，上式也成立．于是对于所有的 $0\leqslant\theta<2\pi$，(1.5.7)式恒成立．从而

$$m(r, F) \geqslant \sum_{\nu=1}^{q} m\left(r, \frac{1}{f-\varphi_\nu}\right)$$

$$-\frac{q}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+\frac{2q}{\delta(\theta)}d\theta - \log 2.$$

再由

$$\frac{1}{\delta(\theta)} < 1 + \sum_{1\leqslant\nu_1<\nu_2\leqslant q}\frac{1}{|\varphi_{\nu_1}(re^{i\theta})-\varphi_{\nu_2}(re^{i\theta})|},$$

遂得

$$m(r, F) \geqslant \sum_{\nu=1}^{q} m\left(r, \frac{1}{f-\varphi_\nu}\right) - q\sum_{1\leqslant\nu_1<\nu_2\leqslant q} m\left(r, \frac{1}{\varphi_{\nu_1}-\varphi_{\nu_2}}\right)$$

$$- q\log\{2q + q^2(q-1)\} - \log 2.$$

$$\geqslant \sum_{\nu=1}^{q} m\left(r, \frac{1}{f-\varphi_\nu}\right) - o\{T(r, f)\}. \tag{1.5.8}$$

为了获得 $m(r, F)$ 的上界，记

$$A_0 = \Delta(\psi_1, \psi_2, \cdots, \psi_p)$$

$$= \begin{vmatrix} \psi_1 & \psi_2 & \cdots \psi_p \\ \psi_1' & \psi_2' & \cdots \psi_p' \\ & \cdots & \\ \psi_1^{(p-1)} & \psi_2^{(p-1)} & \cdots \psi_p^{(p-1)} \end{vmatrix}$$

为 $\psi_j(z)(j=1,2,\cdots,p)$ 的 Wrouskian 行列式，$\Delta(f,\psi_1,\psi_2,\cdots,\psi_p)$为 $f(z)$，$\psi_j(z)(j=1,2,\cdots,p)$的 Wrouskian 行列式.

记

$$L(f)=\frac{(-1)^p}{A_0}\Delta(f,\psi_1,\psi_2,\cdots,\psi_p)$$

$$=f^{(p)}+\frac{A_1}{A_0}f^{(p-1)}+\cdots+\frac{A_{p-1}}{A_0}f'+\frac{A_p}{A_0}f. \tag{1.5.9}$$

显然 $L(f)$ 是一线性算子，且 $L(\varphi_\nu)=0(\nu=1,2,\cdots,q)$.

由

$$F(z)=\frac{1}{L[f(z)]}\sum_{\nu=1}^{q}\frac{L[f(z)]}{f(z)-\varphi_\nu(z)}$$

$$=\frac{1}{L[f(z)]}\sum_{\nu=1}^{q}\frac{L[f(z)-\varphi_\nu(z)]}{f(z)-\varphi_\nu(z)},$$

有

$$m(r,F)\leqslant m\left(r,\frac{1}{L(f)}\right)$$

$$+\sum_{\nu=1}^{q}m\left(r,\frac{L(f-\varphi_\nu)}{f-\varphi_\nu}\right)+\log q.$$

根据 Jensen-Nevanlinna 公式有

$$m\left(r,\frac{1}{L(f)}\right)\leqslant m(r,L(f))+N(r,L(f))+O(1)$$

$$\leqslant m(r,f)+m\left(r,\frac{L(f)}{f}\right)$$

$$+N(r,L(f))+O(1).$$

于是

$$m(r,F)\leqslant m(r,f)+N(r,L(f))+m\left(r,\frac{L(f)}{f}\right)$$

$$+\sum_{\nu=1}^{q}m\left(r,\frac{L(f-\varphi_\nu)}{f-\varphi_\nu}\right)+O(1). \tag{1.5.10}$$

比较 (1.5.8) 与 (1.5.10) 得

$$\sum_{\nu=1}^{q} m\left(r, \frac{1}{f-\varphi_\nu}\right) \leqslant m(r, f) + N(r, L(f))$$

$$+ m\left(r, \frac{L(f)}{f}\right) + \sum_{\nu=1}^{q} m\left(r, \frac{L(f-\varphi_\nu)}{f-\varphi_\nu}\right)$$

$$+ o\{T(r, f)\}.$$

从 $L(f)$ 的定义易见，$L(f)$ 的极点仅能出现在 $f, \psi_1, \cdots, \psi_p$ 的极点处或 A_0 的零点处．且在前一种情形，$L(f)$ 的极点重级不能高于 $f^{(p)}, \psi_1^{(p)}, \cdots, \psi_p^{(p)}$ 的极点重级，于是

$$N(r, L(f)) \leqslant N(r, f^{(p)}) + \sum_{j=1}^{p} N(r, \psi_j^{(p)})$$

$$+ N\left(r, \frac{1}{A_0}\right) \leqslant N(r, f) + p\bar{N}(r, f) + o\{T(r, f)\}.$$

这样就得到

$$(q - o(1))T(r, f) < \sum_{\nu=1}^{q} m\left(r, \frac{1}{f-\varphi_\nu}\right)$$

$$+ q\bar{N}(r, f) + S_1(r, f),$$

其中

$$S_1(r, f) = m\left(r, \frac{L(f)}{f}\right)$$

$$+ \sum_{\nu=1}^{q} m\left(r, \frac{L(f-\varphi_\nu)}{f-\varphi_\nu}\right) + o\{T(r, f)\}.$$

从 (1.5.9) 有

$$m\left(r, \frac{L(f)}{f}\right) \leqslant \sum_{j=1}^{p} m\left(r, \frac{f^{(j)}}{f}\right)$$

$$+ \sum_{j=1}^{p} m\left(r, \frac{A_j}{A_0}\right) + \log(p+1).$$

但由引理 1.6

$$m\left(r, \frac{f^{(j)}}{f}\right) = O\{\log(rT(r, f))\}, \quad (j = 1, 2, \cdots, p).$$

当 $f(z)$ 为无穷级时，可能须除去一列总幅长为有穷的例外区间。而

$$m\left(r, \frac{A_j}{A_0}\right) \leqslant T(r, A_j) + T(r, A_0) + O(1) = o\{T(r, f)\}.$$

对于项 $m\left(r, \frac{L(f - \varphi_\nu)}{f - \varphi_\nu}\right)$ $(\nu = 1, 2, \cdots, q)$ 有相同的估计．这样我们就可得到定理 1.13.

第二章　正　规　族

在本章里将要看到，研究一个函数在本性奇点附近的取值情况，可以化为考虑一族函数在一个固定区域内所具备的某种性质．为此我们引进正规族的概念以及判定一族函数是否正规的法则．其中可以看到 Nevanlinna 理论的重要作用．

§2.1. 全纯函数的正规族

2.1.1. 定义及基本性质

定义 2.1. 设$\mathscr{F}$为一族函数，$\mathscr{F}$中每个函数 $f(z)$ 都在域 D 中确定且全纯．我们称$\mathscr{F}$在D内是正规的，如果对于$\mathscr{F}$中任一无穷序列 $(f_\mu(z))$，总存在子序列 $(f_{\mu_\nu}(z))$，在D内任一有界闭域上一致收敛[1]到极限函数，这个极限函数可以是值无穷．

设 P 为D内任意一点．$\mathscr{F}$称为在点 P 是正规的，如果存在 P 的一邻域 $U(P)$，使得 $\mathscr{F}$ 在 $U(P)$ 是正规的．

正规族的概念是 P. Montel[1] 在本世纪初引进的，他在这方面进行了很多深入的研究．

引理 2.1. 要使函数族 $\mathscr{F}$ 在域 D 内是正规的必要且充分的条件是$\mathscr{F}$在D内每点是正规的．

证．条件的必要性是明显的．

为了证明其充分性，可设D为有界域，否则作一变数替换即可．对于每一个正整数 j，命 E_j 为D内与D边界的距离$\geqslant \frac{1}{j}$的点的集合．容易看出，对于D内任意闭域 $\overline{D}_1$，必可找到充分大的

---

1) 以后我们也简称为内闭一致收敛．

j 使 $\overline{D}_l \subset E_j$.

对于每个固定的 j，E_j 上的每个点 P 都是 D 的内点. 于是存在邻域 $U(P)$，使得 $\mathscr{F}$ 在 $U(P)$ 内是正规的. 取 P 的邻域 $U'(P)$，使 $\overline{U'(P)}$ 含于 $U(P)$内. 由于 E_j 是闭集，$\bigcup\limits_{P\in E_j} U'(P)$ 是它的开覆盖，根据 Heine-Borel 定理，必定存在有限个邻域 $U'_l(l=1,2,\cdots,L)$，构成 E_j 的覆盖. 对于$\mathscr{F}$中的任意序列 $(f_\nu(z))$，由于$\mathscr{F}$在 U_1 正规，存在其子序列 $(f_\nu^{(1)}(z))$ 在 $\overline{U}'_1$ 一致收敛. 又由$\mathscr{F}$在 U_2 正规，于是对于$(f_\nu^{(1)}(z))$，存在其子序列$(f_\nu^{(2)}(z))$在 $\overline{U}'_2$ 上一致收敛. 经过有限次后可知存在 $(f_\nu(z))$ 的子序列 $(f_\nu^{(L)}(z))$ 在 $\bigcup\limits_{l=1}^{L} \overline{U}'_l$ 上一致收敛，从而在 E_j 上一致收敛.

对于 $\mathscr{F}$ 中的任意序列 $(f_\nu(z))$，由以上推理存在其子序列 $(f_{\nu 1}(z))(\nu=1,2,\cdots)$在 E_1 上一致收敛. 对于 $(f_{\nu 1}(z))$，存在其子序列 $(f_{\nu 2}(z))(\nu=1,2,\cdots)$在 E_2 上一致收敛. 类似地，对于 $(f_{\nu j-1}(z))$ 存在其子序列 $(f_{\nu j}(z))(\nu=1,2,\cdots)$ 在 E_j 上一致收敛. 如此继续下去，最后取对角线序列 $f_{11}(z), f_{22}(z), \cdots, f_{jj}(z), \cdots$. 可以看出它在每个 $E_j(j=1,2,\cdots)$ 上都一致收敛，从而在D内任意闭域上一致收敛. 这就证明了 $\mathscr{F}$ 在D内是正规的.

2.1.2. 关于一致有界的正规定则

对于区域D上给定的一族全纯函数，在什么样的条件下能使它成为正规族呢？这种条件通常称为正规定则. 寻求正规定则乃是正规族理论中的主要课题.

在本节里，我们讨论 P. Montel[1] 的一个简单而基本的正规定则. 为此先引入一族函数在一个集合上一致有界与同等连续的概念.

定义 2.2. 函数族$\mathscr{F}$称为在集 E 上一致有界，如果存在一正数 M，使得对于$\mathscr{F}$中任一函数 $f(z)$和 E 上任意点 z 恒有 $|f(z)| \leqslant M$.

定义 2.3. 函数族$\mathscr{F}$称为在集 E 上同等连续，如果任给正数 ε，存在相应的 $\delta=\delta(\varepsilon)$，对于族$\mathscr{F}$中任意函数 $f(z)$和 E 上任意两点 z_1 和 z_2，只要$|z_1-z_2|<\delta$ 就有$|f(z_1)-f(z_2)|<\varepsilon$.

定理 2.1. 设$\mathscr{F}$为域D内的一全纯函数族．若$\mathscr{F}$在D内一致有界，则$\mathscr{F}$在D内是正规的.

证．根据引理 2.1，我们仅须证明$\mathscr{F}$在D内每点都是正规的．设 z_0 为D内任意一点，取正数 d 适当小可使 $|z-z_0|\leqslant 2d$ 含于D内．若 z_1, z_2 为圆 $U(z_0)$: $|z-z_0|\leqslant d$ 上任意两点，则由 Cauchy 公式对于$\mathscr{F}$中的任意函数 $f(z)$ 有

$$\begin{aligned} f(z_1)-f(z_2) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-z_0|=2d}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-z_1} \\ &\quad -\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-z_0|=2d}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-z_2} \\ &= \left(\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-z_0|=2d}\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-z_1)(\zeta-z_2)}\right)(z_1-z_2). \end{aligned}$$

由于在D内$\mathscr{F}$一致有界，于是存在正数M使$|f(z)|<M$ ($f\in\mathscr{F}$, $z\in D$)．从而

$$|f(z_1)-f(z_2)|\leqslant\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{M}{d^2}\cdot 2\pi(2d)|z_1-z_2|=\frac{2M}{d}|z_1-z_2|.$$

这表明$\mathscr{F}$在 $U(z_0)$ 既是一致有界，又是同等连续的．我们将由此证明$\mathscr{F}$在 $U(z_0)$ 正规.

在 $U(z_0)$内选取一个处处稠密的集合 E (例如 $U(z_0)$内两个坐标都是有理数的点构成的集合)．对于$\mathscr{F}$中的任一序列 $(f_\nu(z))$，由于$\mathscr{F}$在 $U(z_0)$ 一致有界，用取对角线序列的方法可知存在子序列$(f_{\nu\nu}(z))$在E的每点上都收敛．$(f_{\nu\nu}(z))$是同等连续的，于是对任意正数 ε，存在相应的正数 δ，当 z_1, z_2 都属于 $U(z_0)$且$|z_1-z_2|<\delta$ 时有

$$|f_{\nu\nu}(z_1)-f_{\nu\nu}(z_2)|<\frac{\varepsilon}{3}. \tag{2.1.1}$$

于 z 平面上作边长为 $\frac{\delta}{2}$ 的正方形的网格．在与 $U(z_0)$ 的交

非空的每个正方形内取 E 上的一点，这样得有限个点 $e_j(j=1,2,\cdots,J)$. 对于 $\varepsilon>0$，存在相应的 N，当 μ 与 ν 都大于 N 时，有

$$|f_{\mu\mu}(e_j)-f_{\nu\nu}(e_j)|<\frac{\varepsilon}{3},\ (j=1,2,\cdots,J). \quad (2.1.2)$$

设 z 为 $U(z_0)$ 内任意一点，则有某个 e_j 使 $|z-e_j|<\delta$. 于是由(2.1.1)有

$$|f_{\mu\mu}(z)-f_{\mu\mu}(e_j)|<\frac{\varepsilon}{3},\quad |f_{\nu\nu}(z)-f_{\nu\nu}(e_j)|<\frac{\varepsilon}{3}. \quad (2.1.3)$$

从(2.1.2)与(2.1.3)可知，当 μ,ν 都大于 N 时有

$$|f_{\mu\mu}(z)-f_{\nu\nu}(z)|<\varepsilon.$$

这里 N 不依赖于 $U(z_0)$ 的点 z. 于是 $(f_{\nu\nu}(z))$ 在 $U(z_0)$ 上一致收敛. 即 $\mathscr{F}$ 在 $U(z_0)$ 是正规的.

系. 设 $\mathscr{F}$ 为域 D 内的一全纯函数族. 若存在正数 M 使得 $\mathscr{F}$ 中每个函数 $f(z)$ 在 D 内恒有 $|f(z)|>M$，则 $\mathscr{F}$ 在 D 内是正规的.

事实上，这时 $\left\{\frac{1}{f(z)}, f\in\mathscr{F}\right\}$ 便适合定理 2.1 的条件，因而为正规族. 于是 $\mathscr{F}$ 也是正规族.

2.1.3. Marty 定则

现在我们讨论 Marty[1] 定则. 值得注意的是这个定则为判定正规性的充要条件.

定理 2.2. 设 $\mathscr{F}$ 为域 D 内的全纯函数族. $\mathscr{F}$ 在 D 内正规的必要且充分的条件是对于 D 内的任意有界闭子域 $\overline{D}_1$，存在相应的正数 M 使得

$$|f'(z)|\leqslant M(1+|f(z)|^2) \quad (2.1.4)$$

对于 $\mathscr{F}$ 中每个函数 $f(z)$ 和 $\overline{D}_1$ 上所有的点 z 成立.

证. 条件是必要的. 如若不然，即存在 D 的一个闭子域 $\overline{D}_1$ 和 $\mathscr{F}$ 中的一列函数 $f_\mu(z)(\mu=1,2,\cdots)$ 使得

$$\lim_{\mu\to\infty}\left\{\max_{z\in\overline{D}_1}\frac{|f'_\mu(z)|}{1+|f_\mu(z)|^2}\right\}=\infty. \quad (2.1.5)$$

由于$\mathscr{F}$是正规的，可以从$(f_\mu(z))$中选取子序列$(f_{\mu_\nu}(z))$在D内闭一致收敛于 $\varphi(z)$.

如果 $\varphi(z) \not\equiv \infty$，则

$$\frac{|f'_{\mu_\nu}(z)|}{1+|f_{\mu_\nu}(z)|^2} \to \frac{|\varphi'(z)|}{1+|\varphi(z)|^2}.$$

于是当 ν 适当大时有

$$\max_{z\in \bar{D}_1}\frac{|f'_{\mu_\nu}(z)|}{1+|f_{\mu_\nu}(z)|^2} \leqslant 1+\max_{z\in \bar{D}_1}\frac{|\varphi'(z)|}{1+|\varphi(z)|^2} < \infty.$$

如果 $\varphi(z)\equiv\infty$，则 $\dfrac{1}{f_{\mu_\nu}(z)}$ 在D内闭一致收敛于 0．从而

$$\frac{|f'_{\mu_\nu}(z)|}{1+|f_{\mu_\nu}(z)|^2} = \frac{\left|\left(\dfrac{1}{f_{\mu_\nu}(z)}\right)'\right|}{1+\left|\dfrac{1}{f_{\mu_\nu}(z)}\right|^2} \to 0.$$

这都与 (2.1.5) 式相矛盾，于是必要性得证.

条件也是充分的．为了证明$\mathscr{F}$在D内正规，仅须证明$\mathscr{F}$在D内每点是正规的．设 z_0 为D内任意一点，则存在正数 d 使得 $|z-z_0|\leqslant d$ 含于D内．根据定理条件，存在正数M使得(2.1.4)式对于$\mathscr{F}$中每个函数 $f(z)$ 和 $|z-z_0|\leqslant d$ 上所有的点 z 成立.

对于$\mathscr{F}$中任一函数 $f(z)$，区分两种情况.

1) $|f(z_0)|<1$.

我们断言在圆 $|z-z_0|\leqslant \min\left(d, \dfrac{1}{5M}\right)$ 上恒有 $|f(z)|<2$.

事实上，若在 $|z-z_0|\leqslant d$ 上恒有 $|f(z)|<2$，则上述断言已经成立．否则在 $|z-z_0|\leqslant d$ 上存在 z_1 使 $|f(z_1)|=2$，并且在 $\overline{z_0z_1}$ 上恒有 $|f(z)|<2$．于是由 (2.14) 有

$$\begin{aligned}2=|f(z_1)| &\leqslant |f(z_0)|+\left|\int_{\overline{z_0z_1}} f'(\zeta)d\zeta\right| \\ &< 1+5M|z_1-z_0|.\end{aligned}$$

从而

$$|z_1-z_0|>\frac{1}{5M},$$

这时断言也成立.

2) $|f(z_0)| \geqslant 1$.

我们断言在圆$|z-z_0| \leqslant \min\left(d, \frac{1}{5M}\right)$上恒有$|f(z)| > \frac{1}{2}$.事实上,若在$|z-z_0| \leqslant d$上恒有$|f(z)| > \frac{1}{2}$,则论断已经成立.否则在$|z-z_0| \leqslant d$上存在$z_1$使$|f(z_1)| = \frac{1}{2}$而在$\overline{z_0 z_1}$上恒有$\frac{1}{2} < |f(z)|$,即$\frac{1}{|f(z)|} < 2$.

注意在$|z-z_0| \leqslant d$上有

$$\frac{\left|\left(\frac{1}{f(z)}\right)'\right|}{1+\left(\frac{1}{|f(z)|}\right)^2} = \frac{|f'(z)|}{1+|f(z)|^2} \leqslant M.$$

因此在$\overline{z_0 z_1}$上有

$$\left|\left(\frac{1}{f(z)}\right)'\right| < 5M.$$

于是

$$2 = \frac{1}{|f(z_1)|} \leqslant \frac{1}{|f(z_0)|} + \left|\int_{\overline{z_0 z_1}} \left(\frac{1}{f(z)}\right)' dz\right|$$
$$< 1 + 5M|z_1 - z_0|.$$

故

$$|z_1 - z_0| > \frac{1}{5M}.$$

因而,对D内任意点z_0,存在一个固定的邻域$|z-z_0| \leqslant \min\left(d, \frac{1}{5M}\right)$,在此邻域中对于$\mathscr{F}$中每个函数$f(z)$或者恒有$|f(z)| < 2$或者恒有$\frac{1}{|f(z)|} < 2$.于是在$D$内$\mathscr{F}$是正规的.

§2.2. Montel 定则

在本节里我们将推导 Montel[1] 的一个十分深刻的正规定则．为此先建立几个引理。

2.2.1. 几个引理

在以后计算时，常要用到以下一些不等式．

引理 2.2. 对于 $x \geqslant 0$，$A \geqslant e$，有

$$A\log^+ x \leqslant x + A(\log A - 1). \tag{2.2.1}$$

证．当 $0 \leqslant x \leqslant 1$ 时，引理的结论是显然的．

当 $x > 1$ 时，考察函数

$$\varphi(x) = x - A\log x,$$

它在 $x = A$ 时有最小值 $A - A\log A$．于是

$$x - A\log x \geqslant A - A\log A.$$

这时(2.2.1)式也成立．

引理 2.3. 对于 $x > 0$，$A \geqslant e$ 有

$$\log x + A\log^+\log^+\frac{1}{x} \leqslant \log^+ x + A(\log A - 1). \tag{2.2.2}$$

证．应用上述引理 2.2，

$$A\log^+\log^+\frac{1}{x} \leqslant \log^+\frac{1}{x} + A(\log A - 1).$$

而

$$\log x = \log^+ x - \log^+\frac{1}{x},$$

便立即得到(2.2.2)式．

在很多情况需要用到下述引理，它本质上是属于 F. Bureau 的．这里叙述的是熊庆来[2]改进后的形式．

引理 2.4. 设 $T(r)$ 是 (r_0, R) 上定义的非负、连续、非减的函数，$a(r)$为该区间上定义的非负且非增的函数，b, c 为两个常数。

若对于 $r_0 < r < \rho < R$ 恒有

$$T(r) < a(r) + b\log^+\frac{1}{\rho - r} + c\log^+T(\rho), \qquad (2.2.3)$$

则在(r_0, R)上有

$$T(r) < 2a(r) + B\log^+\frac{2}{R - r} + C, \qquad (2.2.4)$$

其中B和C为由b和c决定的常数.

证. 若在(r_0, R)上恒有 $T(r) < 1$，则引理结论显然成立. 在相反的情况，(r_0, R)内存在 r_0'(r_0'可以与 r_0重合)，使得从 r_0'开始有 $T(r) \geq 1$. 对于 $r_0' < r < R$，由于$\int_r^{\frac{7R+r}{8}}\frac{dt}{R-t} > 2$，根据引理 1.4 在$\left(r, \frac{7R+r}{8}\right)$内存在 r_1 使

$$T\left(r_1 + \frac{R - r_1}{eT(r_1)}\right) < 2T(r_1).$$

对 $r_0' < r < r_1 < r_1 + \dfrac{R - r_1}{eT(r_1)} < R$应用(2.2.3)式有

$$\begin{aligned}T(r_1) &< a(r_1) + b\log^+\frac{eT(r_1)}{R - r_1} + c\log^+T\left(r_1 + \frac{R - r_1}{eT(r_1)}\right)\\ &< a(r_1) + b\log^+\frac{e}{R - r_1} + c\log 2\\ &\quad + (b + c)\log^+T(r_1).\end{aligned}$$

注意

$$\begin{aligned}&2(b + c)\log^+T(r_1)\\ &\qquad \leqslant T(r_1) + 2(b + c)\{\log 2(b + c) - 1\},\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}T(r_1) &< 2a(r_1) + 2b\log^+\frac{e}{R - r_1}\\ &\qquad + 2c\log 2 + 2(b + c)\{\log 2(b + c) - 1\}.\end{aligned}$$

从而

$$T(r) < 2a(r) + 2b\log^{+}\frac{8e}{R-r}$$
$$+ 2c\log 2 + 2(b+c)\{\log 2(b+c) - 1\}.$$
这就是所要证明的结论.

2.2.2. 界囿定理

在本小节里，我们建立两个界囿定理. 由界囿定理便易于导出 Montel 的正规定则.

定理 2.3. 设函数 $f(z)$ 在 $|z| < R$ 内全纯，且 $f(z) \neq 0, 1$；$f'(0) \neq 0$，则对于 $0 < r < R$ 有

$$T(r, f) < C\left\{\log^{+}|f(0)| + \log^{+}\frac{1}{R|f'(0)|} + \log\frac{2R}{R-r}\right\}, \tag{2.2.5}$$

这里 C 为一数字常数.

证. 应用 Nevanlinna 第二基本定理(定理 1.4)于函数 $f(z)$ 以及三个数 $0, 1, \infty$，有

$$T(r, f) < m\left(r, \frac{f'}{f}\right) + m\left(r, \frac{f'}{f-1}\right) + \log\left|\frac{f(0)(f(0)-1)}{f'(0)}\right| + \log 2.$$

由 Nevanlinna 引理(引理 1.3)，对于 $0 < r < \rho < R$ 有

$$m\left(r, \frac{f'}{f}\right) < 10 + 4\log^{+}\log^{+}\frac{1}{|f(0)|} + 2\log^{+}\frac{1}{r} + 3\log^{+}\frac{1}{\rho - r} + 4\log^{+}\rho + 4\log^{+}T(\rho, f).$$

同样，

$$m\left(r, \frac{f'}{f-1}\right) < 10 + 4\log^{+}\log^{+}\frac{1}{|f(0)-1|} + 2\log^{+}\frac{1}{r} + 3\log^{+}\frac{1}{\rho - r} + 4\log^{+}\rho + 4\log^{+}T(\rho, f) + 4\log 2.$$

于是

$$T(r,f)<20+5\log 2+\left(\log|f(0)|+4\log^{+}\log^{+}\frac{1}{|f(0)|}\right)$$
$$+\left(\log|f(0)-1|+4\log^{+}\log^{+}\frac{1}{|f(0)-1|}\right)$$
$$+\log\frac{1}{|f'(0)|}+4\log^{+}\frac{1}{r}+6\log^{+}\frac{1}{\rho-r}$$
$$+8\log^{+}\rho+8\log^{+}T(\rho,f)。$$

根据引理 2.3,

$$\log|f(0)|+4\log^{+}\log^{+}\frac{1}{|f(0)|}\leqslant\log^{+}|f(0)|$$
$$+4(\log 4-1),$$
$$\log|f(0)-1|+4\log^{+}\log^{+}\frac{1}{|f(0)-1|}\leqslant\log^{+}|f(0)-1|$$
$$+4(\log 4-1)\leqslant\log^{+}|f(0)|+\log 2+4(\log 4-1).$$

从而

$$T(r,f)<12+22\log 2+2\log^{+}|f(0)|$$
$$+\log\frac{1}{|f'(0)|}+4\log^{+}\frac{1}{r}+6\log^{+}\frac{1}{\rho-r}$$
$$+8\log^{+}\rho+8\log^{+}T(\rho,f).$$

再取 $\frac{R}{2}\leqslant r<\rho<R$, 即有

$$T(r,f)<12+26\log 2+2\log^{+}|f(0)|$$
$$+\log\frac{1}{|f'(0)|}+4\log^{+}\frac{1}{R}+8\log^{+}R$$
$$+6\log^{+}\frac{1}{\rho-r}+8\log^{+}T(\rho,f).$$

根据引理 2.4, 消去项 $8\log^{+}T(\rho,f)$, 即得

$$T(r,f)<C\left\{1+\log^{+}|f(0)|+\log^{+}\frac{1}{|f'(0)|}\right.$$

$$+\log^+\frac{2}{R-r}+\log^+R+\log^+\frac{1}{R}\Big\}.$$

当 $R=1$ 时，便得到所要求的不等式

$$T(r,f)<C\left\{\log^+|f(0)|+\log^+\frac{1}{|f'(0)|}+\log\frac{2}{1-r}\right\}.$$

当 $R\neq 1$ 时，命 $f(Rz)=g(z)$，则 $g(z)$ 在 $|z|<1$ 内全纯，且 $g(z)\neq 0,1$；$g'(0)=Rf'(0)\neq 0$，于是对于 $0<r<R$ 有

$$\begin{aligned}T(r,f)&=T\left(\frac{r}{R},g\right)\\&<C\left\{\log^+|g(0)|+\log^+\frac{1}{|g'(0)|}+\log\frac{2}{1-\frac{r}{R}}\right\}\\&<C\left\{\log^+|f(0)|+\log^+\frac{1}{R|f'(0)|}+\log\frac{2R}{R-r}\right\}.\end{aligned}$$

以下我们将从定理 2.3 出发，消去含 $f'(0)$ 的项，获得最大模 $\log M(r,f)$ 的估计.

定理 2.4. 设函数 $f(z)$ 在 $|z|<R$ 内全纯，且 $f(z)\neq 0,1$；则对于 $0<r<R$ 有

$$\log M(r,f)<\frac{CR}{R-r}\left\{\log^+|f(0)|+\log\frac{2R}{R-r}\right\},\qquad(2.2.6)$$

这里 C 为一数字常数[1].

证. 先设 $R=1$，区分两种情况.

(1) $|f'(0)|\geq 1$. 这时应用定理 2.3 有

$$\begin{aligned}\log M(r,f)&\leq\frac{\frac{1+r}{2}+r}{\frac{1+r}{2}-r}T\left(\frac{1+r}{2},f\right)\\&<\frac{4}{1-r}C\left\{\log^+|f(0)|+\log\frac{2}{1-\frac{1+r}{2}}\right\}.\end{aligned}$$

1) 以下我们常用 C 表示数字常数，但它每次出现时不一定是相同数字.

整理后即得 (2.2.6) 式.

(2) $|f'(0)|<1$.

在 $|z|=r$ 上取点 ζ，使得 $|f(\zeta)|=\max\limits_{|z|=r}|f(z)|$. 连结 $\overline{O\zeta}$，再区分两种情况.

(2.1) 在 $\overline{O\zeta}$ 上恒有 $|f'(z)|<1$.

这时，

$$|f(\zeta)|\leqslant|f(0)|+\left|\int_{\overline{O\zeta}}f'(z)dz\right|.$$

从而

$$\log M(r,f)\leqslant\log^+|f(0)|+\log 2.$$

(2.2) 在 $\overline{O\zeta}$ 上从 O 向 ζ 移动时 z_0 为使 $|f'(z)|\geqslant 1$ 的第一个点[1]. 于是在 $\overline{Oz_0}$ 上有 $|f'(z)|<1$，从而

$$|f(z_0)|\leqslant|f(0)|+1.$$

设 z_0 与 ζ 的距离为 d，在 $|z-z_0|<d+1-r$ 内 $f(z)$ 全纯，且 $f(z)\neq 0,1$，$|f'(z_0)|=1$. 应用定理 2.3 则[2]

$$\begin{aligned}T\left(d+\frac{1-r}{2},z_0,f\right)&<C\left\{\log^+|f(z_0)|+\log^+\frac{1}{d+1-r}\right.\\&\quad\left.+\log\frac{2(d+1-r)}{d+1-r-\left(d+\dfrac{1-r}{2}\right)}\right\}\\&<C\left\{\log^+|f(0)|+\log 2+\log\frac{4}{1-r}\right\}\\&<C\left\{\log^+|f(0)|+\log\frac{2}{1-r}\right\}.\end{aligned}$$

于是

$$\log M(r,f)=\log M(d,z_0,f)$$

---

1) $\overline{O\zeta}$ 上使 $|f'(z)|\geqslant 1$ 的点构成闭集，于是所述的第一个点存在.

2) 这里用 $T(r,z_0,f)$ 表示 $f(z)$ 关于圆 $|z-z_0|\leqslant r$ 的特征函数. $M(r,z_0,f)$ 则是 $f(z)$ 关于该圆的最大模.

$$\leqslant \frac{d+\frac{1-r}{2}+d}{d+\frac{1-r}{2}-d} C\left\{\log^+|f(0)|+\log\frac{2}{1-r}\right\}$$

$$< \frac{C}{1-r}\left\{\log^+|f(0)|+\log\frac{2}{1-r}\right\}.$$

当 $R \neq 1$ 时，考虑 $g(z)=f(Rz)$，它在 $|z|<1$ 内全纯，且 $g(z)\neq 0,1$. 于是

$$\log M(r,f) = \log M\left(\frac{r}{R}, g\right)$$

$$< \frac{C}{1-\frac{r}{R}}\left\{\log^+|g(0)|+\log\frac{2}{1-\frac{r}{R}}\right\}$$

$$= \frac{CR}{R-r}\left\{\log^+|f(0)|+\log\frac{2R}{R-r}\right\}.$$

定理 2.4 就是著名的 Schottky 定理，它在 1904 年首先由 F. Schottky[1]用另外的方法和形式得到.

2.2.3. Montel 定则

定理 2.5. 设一族函数 $\mathscr{F}$ 定义在域 D 内. 若在 D 内，族 $\mathscr{F}$ 中每个函数 $f(z)$ 全纯，且不取 0 和 1，则 $\mathscr{F}$ 是域 D 内的正规族.

证. 由引理 2.1，只须证明 $\mathscr{F}$ 在 D 内每点是正规的. 任取 $z_0\in D$，则存在一个正数 d 使得 $|z-z_0|<d$ 完全含于 D 内.

设 $\mathscr{F}$ 中任意一列函数为 $(f_\mu(z))$. 若存在子序列 $(f_{\mu_\nu}(z))$ 使得 ν 趋于 ∞ 时 $|f_{\mu_\nu}(z_0)|$ 有界，则由定理 2.4 易知 $(f_{\mu_\nu}(z))$ 在 $|z-z_0|\leqslant\frac{d}{2}$ 上一致有界，从而可以取出内闭一致收敛的子序列. 即 $\mathscr{F}$ 在点 z_0 是正规的.

当 μ 趋于 ∞ 时若 $|f_\mu(z_0)|$ 不存在有界的子序列，则

$$\lim_{\mu\to\infty}|f_\mu(z_0)|=\infty,$$

在圆 $|z-z_0|<d$ 内，函数 $\frac{1}{f_\mu(z)}$ 全纯，且不取 0 和 1，于是又可

以应用定理 2.4，$\frac{1}{f_\mu(z)}(\mu=1,2,\cdots)$在$|z-z_0|\leqslant\frac{d}{2}$上一致有界，从而可以取出内闭一致收敛的子序列$\frac{1}{f_{\mu_\nu}(z)}(\nu=1,2,\cdots)$，其极限函数记为 $F(z)$．当 $F(z)\not\equiv 0$ 时，由于$\frac{1}{f_{\mu_\nu}(z)}$在$|z-z_0|\leqslant\frac{d}{2}$上没有零点，于是 $F(z)$ 在此圆上也没有零点．从而函数序列$f_{\mu_\nu}(z)$在$|z-z_0|<\frac{d}{2}$内闭一致收敛．当 $F(z)\equiv 0$ 时，则$f_{\mu_\nu}(z)$内闭地一致收敛到∞．因此$\mathscr{F}$在点 z_0 也是正规的．

定理 2.5′. 若在域D内，族$\mathscr{F}$中每个函数$f(z)$全纯，且都不取两个判别的有穷复数 a，b，则$\mathscr{F}$是域D内的正规族．

事实上，考虑域D内的函数族$\mathscr{F}_1$：$\left\{\frac{f(z)-a}{b-a}\right\}$．其中每个函数$\frac{f(z)-a}{b-a}$在$D$内全纯，且不取 0 和 1．于是 $\mathscr{F}_1$在D内正规．由此易见族$\mathscr{F}$在D内也正规．

可以看出 Montel 定则（定理 2.5）是他原来的结果（定理 2.1）的重大发展．同时这个定则和函数取值的问题紧密地联系在一起．

§2.3. Montel 圈属、亚纯函数的正规族

2.3.1. Montel 圈属

围绕着 Montel 正规定则（定理 2.5）有一系列重要的定理，有时把这些定理称为 Montel **圈属**．著名的 Schottky 定理（定理 2.4）就是其中之一．

在 Montel 圈属里，还有下述 Landau[1] 定理．

定理 2.6. 设函数$f(z)$在$|z|<R$内全纯，且$f(z)\neq 0,1$．若$f'(0)\neq 0$，则

$$R\leqslant\frac{C\max(1,|f(0)|^C)}{|f'(0)|}. \tag{2.3.1}$$

证. 根据 Cauchy 不等式应有

$$|f'(0)| \leqslant \frac{M\left(\frac{R}{2}, f\right)}{\frac{R}{2}}.$$

又由定理 2.4 有

$$\log M\left(\frac{R}{2}, f\right) < C\{\log^+ |f(0)| + 1\}.$$

于是

$$R \leqslant \frac{2e^{C\{\log^+|f(0)|+1\}}}{|f'(0)|}.$$

当 $|f(0)| \leqslant 1$ 时,

$$R \leqslant \frac{C}{|f'(0)|}.$$

当 $|f(0)| > 1$ 时,有

$$R \leqslant \frac{C|f(0)|^C}{|f'(0)|}.$$

从 Landau 定理,我们不难重新得到 Picard 定理.

定理 2.7. 设 $f(z)$ 为一整函数,不蜕化为常数,则 $f(z)$ 能取到任意有穷复数,至多除去一个例外值.

证. 如若不然,存在两个有穷复数 a 和 b,使 $f(z) \neq a, b$. 因为 $f(z)$ 不蜕化为常数,于是存在 z_0 使 $f'(z_0) \neq 0$. 对于任意正数 R,在 $|z - z_0| < R$ 内 $g(z) = \dfrac{f(z) - a}{b - a}$ 全纯, $g(z) \neq 0, 1$, $g'(z_0) \neq 0$,根据定理 2.6 R 应有上界. 但 $g(z)$ 为一整函数,便得一矛盾.

不仅如此,我们从 Montel 的正规定则还可得到所谓 Picard 大定理.

定理 2.8. 设函数 $f(z)$ 在 $D: 0 < |z - z_0| < R$ 内全纯,以 z_0 为本性奇点,则 $f(z)$ 在 D 内取到任意有穷复数,至多可能除去一个例外.

证. 无妨设 $z_0=0$. 我们先证明在D内

$$f_\mu(z)=f\left(\frac{z}{2^\mu}\right)\qquad(\mu=1,2,\cdots)\tag{2.3.2}$$

不是正规的.

因若不然,我们区分两种情况.

(1) $(f_\mu(z))$中存在一个子序列$(f_{\mu_\nu}(z))$, 在D内任一闭域上一致收敛到一个全纯函数. 于是在$|z|=\frac{R}{2}$上应有

$$|f_{\mu_\nu}(z)|<M.$$

即在$|z|=\frac{R}{2^{\mu_\nu+1}}$上有

$$|f(z)|<M.\tag{2.3.3}$$

于是在$\frac{R}{2^{\mu_\nu+1}}\leqslant|z|\leqslant\frac{R}{2^{\mu_{\nu-1}+1}}(\nu=2,3,\cdots)$上有(2.3.3)式, 从而在 $0<|z|<\frac{R}{2^{\mu_1+1}}$上(2.3.3)成立. 这与$f(z)$以 z_0 为本性奇点相矛盾.

(2) $(f_\mu(z))$中不存在任何子序列在 D 内闭地一致收敛到全纯函数, 但是$(f_\mu(z))$中存在一个子序列,在D内任一闭域上一致收敛到值∞.

这时必定存在正数 ε, 使在 $0<|z|<\varepsilon$ 上没有$f(z)$的零点. 事实上,如果存在 $z_\nu\to0$, $f(z_\nu)=0$, 则适当选取正整数 μ_ν 可使 $z_\nu=2^{-\mu_\nu}z'_\nu$, 且 $\frac{R}{4}\leqslant|z'_\nu|\leqslant\frac{R}{2}$. 于是从$(f_{\mu_\nu}(z))$中可以选出一子序列在$D$内任一闭域上一致收敛到全纯函数. 这与情况(2)的假定相矛盾.

因此当μ适当大时 $\varphi_\mu(z)=\frac{1}{f_\mu(z)}$ 在 $0<|z|<R$ 内正则, 且$(\varphi_\mu(z))$含有一个子序列在 D 内闭地一致收敛到0. 从而当 $z\to0$ 时 $\frac{1}{f(z)}\to0$. 这也与 $f(z)$ 以 z_0 为本性奇点相矛盾. 于是

$(f_\mu(z))$在D内不是正规的.

如果在D内$f(z)$不取两个有穷复数a和b，则$(f_\mu(z))$在D内正规. 这与刚才的论断相矛盾.

定理 2.8 还可加强为下述 Julia 的定理.

定理 2.9. 设$f(z)$在$D: 0 < |z - z_0| < R$内全纯，以z_0为本性奇点，则必存在由z_0发出的半直线J，使得在以z_0为顶点以J为平分角线的任意角域与D的交内，$f(z)$取到任意有穷复数，至多有一个例外.

这样的半直线J称为$f(z)$的 Julia 方向. 它是由 Julia[1] 在 1919 年得到的，这个结果成为辐角分布论研究的开端.

证. 仍设$z_0 = 0$. 由定理 2.8 的证明，在$D: 0 < |z| < R$内函数族

$$f_\mu(z) = f\left(\frac{z}{2^\mu}\right) \qquad (\mu = 1, 2, \cdots)$$

不是正规的. 于是在D内必存在点z_1，使得在z_1的任意邻域中$(f_\mu(z))$都不是正规的. 方向oz_1就是所要的一条J. 事实上，以o为顶点J为平分角线作任意小角域Ω，它与$0 < |z| < \varepsilon$的交域中含有以z_1为心的圆$U(z_1): |z - z_1| < d$. $(f_\mu(z))$在$U(z_1)$中不是正规的，所以存在子序列$(f_{\mu_\nu}(z))$在$U(z_1)$中取到一切有穷复数a，至多可能有一个例外值. 于是$f(z)$在

$$\left|z - \frac{z_1}{2^{\mu_\nu}}\right| < \frac{d}{2^{\mu_\nu}} \qquad (\nu = 1, 2, 3, \cdots)$$

中取到一切有穷复数a，至多可能有一个例外值. 而上述这些小圆都含于角域Ω内.

2.3.2. 亚纯函数正规族

设$(f_\mu(z))$是域D内的一列亚纯函数，其极限函数为$f(z)$(可以恒等于一常数，包括值∞). 对于D内任意点z_0，我们称$(f_\mu(z))$在点z_0一致收敛，如果存在z_0的邻域$U(z_0)$，当$f(z_0) \neq \infty$和μ适当大时，$f_\mu(z)$在$U(z_0)$全纯且一致收敛到$f(z)$；当$f(z_0) = \infty$

和μ适当大时，$\dfrac{1}{f_\mu(z)}$在$U(z_0)$全纯且一致收敛到$\dfrac{1}{f(z)}$.

设$\mathscr{F}$是D内的一族亚纯函数，如果对$\mathscr{F}$中任一函数序列$(f_\mu(z))$，存在子序列$(f_{\mu_\nu}(z))$在D内每点一致收敛，则称$\mathscr{F}$在D内是正规的.

定理 2.10. 设$\mathscr{F}$是D内的一族亚纯函数. 如果存在三个互相判别的复数a,b,c，使得$\mathscr{F}$中每个函数$f(z)$在D内不取a,b,c，则$\mathscr{F}$在D内正规.

证. 当a, b, c中有一个例如c为∞时，定理 2.10 即为定理 2.5′.

当a, b, c均为有穷时，仅须考虑

$$g(z)=\frac{1}{f(z)-a},$$

则$g(z)$为全纯函数，不取两个值$\dfrac{1}{b-a}$和$\dfrac{1}{c-a}$. 于是$(g(z))$在D内正规. 从而可以推知$\mathscr{F}$是D内的正规族.

在本章里，我们讨论了正规族的基础理论. 第四、五章的某些部分，还将讨论近年来正规族方面的一些重要成果.

第三章 Borel 方向

本章是 Nevanlinna 基本定理的另一个重要应用．继 G. Julia[1] 应用正规族理论证明了 Julia 方向的存在性后，人们开始探讨整函数和亚纯函数在从原点发出的一条方向附近的性质，这就是所谓的辐角分布．在这方面有 H. Milloux[1] 引进的"充满圆"的概念和 A. Ostrowski[1] 的结果．1928 年，G. Valiron[3] 在 Nevanlinna 理论的基础上，证明了有穷正级亚纯函数的 Borel 方向的存在性，使得辐角分布理论获得了重大发展．

§ 3.1. 一些预备知识

3.1.1. Boutroux-Cartan 定理

在辐角分布研究中，我们常要用到下述定理，它最初由 P. Boutroux 研究，并由 H. Cartan[1] 给出完善的结果．

定理 3.1. 设 $a_\mu(\mu = 1,2,\cdots,n)$ 为平面上任意的 n 个点，h 为任意一个正数，则在平面上使得

$$\prod_{\mu=1}^{n} |z - a_\mu| \leqslant \left(\frac{h}{e}\right)^n \tag{3.1.1}$$

成立的点 z 可被含于总数不超过 n，半径总和不超过 $2h$ 的一组圆[1)]内．

证．命 λ_1 为具有下述性质的最大正整数：存在半径为 $\lambda_1 \dfrac{h}{n}$ 的圆 C_1，使得 C_1 中恰巧含有 a_μ 中的 λ_1 个点．显然 $\lambda_1 \leqslant n$．倘若

1) 以后我们把这一组圆称为关于 $a_\mu(\mu=1,2,\cdots,n)$ 和数 h 的 Boutroux-Cartan 除外圆．

存在一个圆，半径为 $n\frac{h}{n}$，包含了所有的 $a_\mu(\mu=1,2,\cdots,n)$，则 $\lambda_1=n$. 在相反的情况，则考虑 $n-1$. 倘若存在一个圆，半径为 $(n-1)\frac{h}{n}$，恰巧包含了 a_μ 中的 $n-1$ 个点，则 $\lambda_1=n-1$. 在相反的情况，则考虑 $n-2$. 并将这个步骤一直继续下去. 最后 $\lambda_1\geqslant 1$ 必定存在. 因若不然，由于 $\lambda_1\neq 1$，则在 a_1 为心，$\frac{h}{n}$ 为半径的圆中必定包含 a_μ 中 $k_1>1$ 个点. 由于 $\lambda_1\neq k_1$，再作上述圆的同心圆，半径为 $k_1\frac{h}{n}$，其中必定包含 a_μ 中 k_2 个点，且 $k_2>k_1$. 由于 $\lambda_1\neq k_2$，再作同心圆，半径为 $k_2\frac{h}{n}$，其中必定包含 a_μ 中 k_3 个点，且 $k_3>k_2$. 将这个步骤继续到 n 步，半径为 $k_{n-1}\frac{h}{n}$ 的圆中要包含 k_n 个 a_μ 的点，且

$$k_n>k_{n-1}>k_{n-2}>\cdots>k_2>k_1>1.$$

由于 $k_i(i=1,2,\cdots,n)$ 都是正整数，得 $k_n\geqslant n+1$. 这与 $a_\mu(\mu=1,2,\cdots,n)$ 的总数为 n 相矛盾.

$a_\mu(\mu=1,2,\cdots,n)$ 中位于 C_1 内的点称为 λ_1 列的. 当 $\lambda_1<n$ 时，考虑其余 $n-\lambda_1$ 个点，如上必有一个最大的正整数 λ_2，$\lambda_2\leqslant\lambda_1$，使得存在半径为 $\lambda_2\frac{h}{n}$ 的圆 C_2，C_2 内含有余下点中的 λ_2 个点. 将 C_2 中的 λ_2 个点称为 λ_2 列的. 当 $\lambda_1+\lambda_2<n$ 时，再在余下的 $n-\lambda_1-\lambda_2$ 个点中考虑，可以确定 λ_3 列的点，且 $\lambda_3\leqslant\lambda_2$. 如此继续下去，最后到 λ_p 列时，相应的圆 C_p 中有 λ_p 个点，并且 $\sum\limits_{\mu=1}^{p}\lambda_\mu=n$，即终止此步骤.

根据列的定义，可以断言：设 λ 为不超过 n 的正整数. 若在半径为 $\lambda\frac{h}{n}$ 的一个圆 S 内包含了至少 λ 个点，则其中必有一个点的列是 $\geqslant\lambda$ 的. 事实上，如果在 S 内包含了 $\lambda'(\geqslant\lambda)$ 个点都是小于

λ 列的. 作 S 的同心圆,半径为 $\lambda' \dfrac{h}{n}$, 包含 $\lambda''(>\lambda')$ 个点都是小于 λ 列的. 再作 S 的同心圆,半径为 $\lambda'' \dfrac{h}{n}$,包含 $\lambda'''(>\lambda'')$ 个点都是小于 λ 列的. 如此继续下去,最后存在 S 的同心圆,半径为 $\lambda^* \dfrac{h}{n}$,包含 $\lambda^*(>\lambda)$ 个点都是小于 λ 列的. 这与列的定义矛盾.

分别作 $C_1, C_2, \cdots, C_p$ 的同心圆 $\Gamma_1, \Gamma_2, \cdots, \Gamma_p$, 半径为 $2\lambda_1 \dfrac{h}{n}$, $2\lambda_2 \dfrac{h}{n}$, $\cdots$, $2\lambda_p \dfrac{h}{n}$. $\Gamma_\mu(\mu = 1, 2, \cdots, p)$ 的总数不超过 n, 半径总和不超过 $2h$. 现在我们证明对位于 $\bigcup\limits_{\mu=1}^{p} \Gamma_\mu$ 外的点 z,将有(3.1.1)式. 事实上,若 $\lambda_{\mu_0} \geqslant \lambda$, 以 z 为心,以 $\lambda \dfrac{h}{n}$ 为半径的圆 C 与 $C_\mu(\mu = 1, 2, \cdots, \mu_0)$ 不相交, 于是在 C 内的 a_μ 的点都是小于 λ 列的. 从而 C 内 a_μ 的数目至多为 $\lambda - 1$ 个. 将 a_μ 按与 z 的距离由近至远排列, 则第 λ 个点与 z 的距离应 $\geqslant \lambda \dfrac{h}{n}$. $(\lambda = 1, 2, \cdots, n)$. 于是

$$\prod_{\mu=1}^{n} |z - a_\mu| \geqslant \frac{h}{n} \cdot \frac{2h}{n} \cdots \frac{nh}{n} = \left(\frac{h}{n}\right)^n \cdot n! > \left(\frac{h}{e}\right)^n.$$

3.1.2. 球面距离

在推导亚纯函数的 Borel 方向时, 需要用到球面距离的概念及其性质.

用复平面上的实轴与虚轴作为空间直角坐标系的两个坐标轴, 第三个轴垂直于复平面. 以 $(0, 0, 1/2)$ 为心, $1/2$ 为半径作 Riemann 球 S, 它与复平面相切. 设复平面上任意一点为 z, 它与北极点 $N:(0, 0, 1)$ 的连线交 S 于另一点 w, w 叫作 z 的球像. 特别地无穷远点的球像为 N.

定义 3.1. 对于任意两个复数 z_1, z_2, 它们的球像 w_1 与 w_2 之

间的距离，称为 z_1 与 z_2 的球面距离，或简称为球距，记作 $|z_1, z_2|$.

根据定义显然有 $0\leqslant |z_1,z_2| \leqslant 1$.

若 $z = x + iy$，则易于算出其球像 w 为

$$\left(\frac{x}{1+|z|^2}, \frac{y}{1+|z|^2}, \frac{|z|^2}{1+|z|^2}\right).$$

从而

$$|z,\infty| = \frac{1}{(1+|z|^2)^{\frac{1}{2}}}. \tag{3.1.2}$$

若 z_1, z_2 为两个有穷复数，则由球距的定义以及初等计算可知

$$|z_1, z_2| = \frac{|z_1 - z_2|}{(1+|z_1|^2)^{\frac{1}{2}}(1+|z_2|^2)^{\frac{1}{2}}}. \tag{3.1.3}$$

我们以后要用到

(1) 若 z 为一复数适合 $|z,\infty| > d > 0$，则 $|z| < \frac{1}{d}$.

由 (3.1.2) 式，性质 (1) 是明显的.

(2) 若 z_1, z_2 为两个有穷复数，则

$$\log^+|z_1| + \log^+|z_2| + \log\frac{1}{|z_1 - z_2|} \leqslant \log\frac{1}{|z_1, z_2|}. \tag{3.1.4}$$

事实上由(3.1.3)有

$$\begin{aligned}\log\frac{1}{|z_1,z_2|} &= \log\frac{(1+|z_1|^2)^{\frac{1}{2}}(1+|z_2|^2)^{\frac{1}{2}}}{|z_1 - z_2|}\\ &= \log(1+|z_1|^2)^{\frac{1}{2}} + \log(1+|z_2|^2)^{\frac{1}{2}}\\ &\quad + \log\frac{1}{|z_1 - z_2|}\\ &\geqslant \log^+|z_1| + \log^+|z_2| + \log\frac{1}{|z_1 - z_2|}.\end{aligned}$$

定义 3.2. 设 a_0 为一复数，r 为一正数 ($r \leqslant 1$). $|z, a_0| < r$ 称作以 a_0 为心 r 为球面半径的圆或称以 a_0 为心 r 为半径的球面圆.

完全类似于定理 3.1. 的证明，我们有

定理 3.1′. 设 $a_\mu(\mu=1,2,\cdots,n)$ 为任意 n 个复数，h 为任意一个正数，则使得

$$\prod_{\mu=1}^{n}|z,a_\mu|\leqslant\left(\frac{h}{e}\right)^{n}$$

成立的复数 z 可含于总数不超过 n，半径总和不超过 $2h$ 的一组球面圆内.

3.1.3. 界囿定理

在导出 Borel 方向时，需要应用 Nevanlinna 第二基本定理. 这时定理的余项也不可忽视. 为此我们先将 Nevanlinna 第二基本定理中的余项加以估算，而有下述定理.

定理 3.2. 设函数 $f(z)$ 于 $|z|\leqslant R$ 上亚纯. 若 $f(0)\neq 0,1,\infty$；$f'(0)\neq 0$，则对于 $0<r<R$ 有

$$\begin{aligned}T(r,f)<2\{&N(R,0)+N(R,1)\\&+N(R,\infty)\}+191+4\log^+|f(0)|\\&+2\log\frac{1}{R|f'(0)|}+12\log^+\frac{R}{R-r}.\end{aligned}\tag{3.1.5}$$

证. 我们从 Nevanlinna 第二基本定理(定理 1.4)出发有

$$\begin{aligned}T(r,f)<{}&N(r,0)+N(r,1)+N(r,\infty)\\&+m\left(r,\frac{f'}{f}\right)+m\left(r,\frac{f'}{f-1}\right)\\&+\log\left|\frac{f(0)(f(0)-1)}{f'(0)}\right|+\log 2.\end{aligned}$$

如同定理 2.3 的证明，应用引理 1.3 估计 $m\left(r,\dfrac{f'}{f}\right)$ 与 $m\left(r,\dfrac{f'}{f-1}\right)$ 可得

$$T(r,f)<N(r,0)+N(r,1)+N(r,\infty)+12+22\log 2$$

$$+ 4\log^+\frac{1}{r} + 6\log^+\frac{1}{\rho - r} + 8\log^+\rho + 8\log^+T(\rho, f)$$

$$+ 2\log^+|f(0)| + \log^+\frac{1}{|f'(0)|}. \tag{3.1.6}$$

如果在$(0, R)$上恒有 $T(r, f) < 1$，则(3.1.5)已经成立．否则存在 r_0, $0 \leqslant r_0 < R$，使 $T(r_0, f) = 1$．对于 $r_0 < r < R$ 应用 Borel 关于增函数的引理(引理 1.4)[1]，于是在$\left[r, \frac{7R+r}{8}\right]$上存在 τ 使得

$$T\left(\tau + \frac{R-\tau}{eT(\tau, f)}, f\right) < 2T(\tau, f).$$

取

$$\tau' = \tau + \frac{R-\tau}{eT(\tau, f)},$$

则 $0 < r \leqslant \tau < \tau' < R$．对于 τ 与 τ' 应用(3.1.6)式则

$$\begin{aligned} T(\tau, f) < {} & N(R, 0) + N(R, 1) + N(R, \infty) + 28 \\ & + 4\log^+\frac{1}{\tau} + 6\log^+\frac{1}{\tau' - \tau} + 8\log^+\tau' \\ & + 8\log^+T(\tau', f) + 2\log^+|f(0)| + \log^+\frac{1}{|f'(0)|}. \end{aligned}$$

但是

$$\log^+T(\tau', f) < \log T(\tau, f) + \log 2,$$

$$\begin{aligned} \log^+\frac{1}{\tau' - \tau} & \leqslant \log^+\frac{1}{R-\tau} + 1 + \log^+T(\tau, f) \\ & \leqslant \log^+\frac{8}{R-r} + 1 + \log^+T(\tau, f), \end{aligned}$$

于是

$$T(\tau, f) < N(R, 0) + N(R, 1) + N(R, \infty) + 28 + 4\log^+\frac{1}{r}$$

---

1) 这里也可以应用 Bureau 引理(引理 2.4)消去项 $8\log^+T(\rho, f)$，只是所得不等式的系数不如(3.1.5)精确，不过对于以后的应用并无差别．

$$+ 6\log^+\frac{1}{R-r} + 6\log 8 + 6 + 6\log^+T(\tau, f)$$

$$+ 8\log^+R + 8\log^+T(\tau, f) + 8\log 2 + 2\log^+|f(0)|$$

$$+ \log^+\frac{1}{|f'(0)|} < N(R, 0) + N(R, 1) + N(R, \infty)$$

$$+ 53 + 2\log^+|f(0)| + \log^+\frac{1}{|f'(0)|} + 4\log^+\frac{1}{r}$$

$$+ 8\log^+R + 6\log^+\frac{1}{R-r} + 14\log^+T(\tau, f).$$

注意

$$14\log^+T(\tau, f) \leqslant \frac{1}{2}T(\tau, f) + 14(\log 28 - 1),$$

因此

$$T(r, f) \leqslant T(\tau, f) < 2\{N(R, 0) + N(R, 1) + N(R, \infty)\}$$

$$+ 176 + 4\log^+|f(0)| + 2\log^+\frac{1}{|f'(0)|}$$

$$+ 8\log^+\frac{1}{r} + 16\log^+R + 12\log^+\frac{1}{R-r}.$$

当 $r \geqslant \frac{R}{2}$ 时有 $\log^+\frac{1}{r} \leqslant \log^+\frac{1}{R} + \log 2$，再计及

$$\log^+\frac{1}{R-r} \leqslant \log^+\frac{R}{R-r} + \log^+\frac{1}{R} \quad 得$$

$$T(r, f) < 2\{N(R, 0) + N(R, 1) + N(R, \infty)\} + 182$$

$$+ 4\log^+|f(0)| + 2\log^+\frac{1}{|f'(0)|} + 20\log^+\frac{1}{R}$$

$$+ 16\log^+R + 12\log^+\frac{R}{R-r}.$$

当 $r < \frac{R}{2}$ 时,

$$
\begin{aligned}
T(r, f) &\leqslant T\left(\frac{R}{2}, f\right) \\
&< 2\{N(R, 0) + N(R, 1) + N(R, \infty)\} + 182 \\
&\quad + 4\log^+|f(0)| + 2\log^+\frac{1}{|f'(0)|} + 20\log^+\frac{1}{R} \\
&\quad + 16\log^+ R + 12\log 2.
\end{aligned}
$$

于是对于 $(0, R)$ 内所有的 r 都有

$$
\begin{aligned}
T(r, f) < 2\{N(R, 0) &+ N(R, 1) + N(R, \infty)\} + 191 \\
&+ 4\log^+|f(0)| + 2\log^+\frac{1}{|f'(0)|} \\
&+ 20\log^+\frac{1}{R} + 16\log^+ R + 12\log^+\frac{R}{R-r}.
\end{aligned}
$$

取 $R = 1$，则

$$
\begin{aligned}
T(r, f) < 2\{N(1, 0) &+ N(1, 1) + N(1, \infty)\} + 191 \\
&+ 4\log^+|f(0)| + 2\log^+\frac{1}{|f'(0)|} \\
&+ 12\log^+\frac{1}{1-r}. \qquad (3.1.7)
\end{aligned}
$$

当 $R \neq 1$ 时，命 $z = R\zeta$，$f(z) = f(R\zeta) = g(\zeta)$. 这时 $g(\zeta)$ 在 $|\zeta| \leqslant 1$ 上亚纯，可以应用(3.1.7)，且 $g(0) = f(0)$，$g'(0) = Rf'(0)$. 于是

$$
\begin{aligned}
T(r, f) &= T\left(\frac{r}{R}, g\right) \\
&< 2\{N(R, 0) + N(R, 1) + N(R, \infty)\} + 191 \\
&\quad + 4\log^+|f(0)| + 2\log^+\frac{1}{R|f'(0)|} + 12\log^+\frac{R}{R-r}.
\end{aligned}
$$

§3.2. 基 本 定 理

3.2.1. Valiron 的基本定理

从上节的界囿定理和 Boutroux-Cartan 定理出发，G. Valiron[3,4]

证明了一个基本定理，它在导出 Borel 方向时具有关键作用.

定理 3.3. 设函数 $f(z)$ 于 $|z|<1$ 内亚纯. 若

$$N=n(1,f=0)+n(1,f=1)+n(1,f=\infty),$$

则对于 $0<r<1$ 和任意复数 a 有

$$n(r,f=a)<\frac{C}{(1-r)^2}\left\{(N+1)\log\frac{2}{1-r}+\log\frac{1}{|f(z_0),a|}\right\}. \tag{3.2.1}$$

于此，C 为一数字常数，z_0 为 $|z|<1$ 内的一点，$|f(z_0),a|$ 表示 $f(z_0)$ 与 a 间的球面距离.

证. 相应于 $f(z)$ 在 $|z|<1$ 内的零点，1 值点和极点 $a_\nu(\nu=1,2,\cdots,N)$ 以及数 $h=\frac{1-r}{40e}$ 应用 Boutroux-Cartan 定理则

$$\prod_{\nu=1}^{N}|z-a_\nu|>h^N,$$

至多除去 N 个圆内的点，其半径总和不超过 $2eh=\frac{1-r}{20}$. 将这些除外圆的总和记为 (γ).

在 $|z|<\frac{1-r}{5}$ 内，可以选取点 $z_0\bar{\in}(\gamma)$. 无妨设 $|f(z_0)|\leqslant 1$. 否则我们考虑函数 $\frac{1}{f(z)}$，$\frac{1}{f(z)}$ 仍适合定理条件. 在

$$r+\frac{2}{5}(1-r)\leqslant|z-z_0|\leqslant r+\frac{3}{5}(1-r)$$

上可以选取圆周 $|z-z_0|=\rho$ 与 (γ) 无交. 命

$$|f(\zeta)|=\max_{|z-z_0|=\rho}|f(z)|.$$

以直线段连结点 z_0 与 ζ，遇到 (γ) 中的小圆时则以相应弧段取代相交部分，这样得一曲线段 L，其长度不超过

$$r+\frac{3}{5}(1-r)+\pi\frac{1-r}{20}<1.$$

区分两种情况.

(1) 在 L 上恒有 $|f'(z)|<1$.

这时

$$|f(\zeta)| \leqslant |f(z_0)| + \left|\int_L f'(z)dz\right| < 2.$$

于是[1]

$$m(\rho, z_0, f) < \log 2.$$

设 $a_\nu(\nu=1,2,\cdots,N_1)$是 $f(z)$ 在 $|z-z_0|\leqslant\rho$ 上的极点，由于 $z_0\bar{\in}(\gamma)$,

$$\left(\prod_{\nu=1}^{N_1}|z_0-a_\nu|\right)\left(\prod_{\nu=N_1+1}^{N}|z_0-a_\nu|\right) > h^N.$$

故

$$\prod_{\nu=1}^{N_1}|z_0-a_\nu| > \left(\frac{h}{2}\right)^N.$$

即

$$N(\rho, z_0, f) < N\log\frac{2}{h} = N\log\frac{80e}{1-r}.$$

因此

$$T(\rho, z_0, f) < N\log\frac{80e}{1-r} + \log 2. \qquad (3.2.2)$$

对于任意复数 a 有

$$n\left(r+\frac{1-r}{5}, z_0, f=a\right)$$

$$=\frac{n\left(r+\frac{1-r}{5}, z_0, f=a\right)}{\log\dfrac{\rho}{r+\dfrac{1-r}{5}}}\int_{r+\frac{1-r}{5}}^{\rho}\frac{dt}{t}$$

$$\leqslant\frac{1}{\log\dfrac{\rho}{r+\dfrac{1-r}{5}}}N\left(\rho, z_0, \frac{1}{f-a}\right).$$

---

1) 这里及以后用 $m(\rho, z_0, f)$, $n(\rho, z_0, f)$, $N(\rho, z_0, f)$, $T(\rho, z_0, f)$ 表示 $f(z)$ 对于圆 $|z-z_0|=\rho$ 的 m, n, N, T.

但

$$\log\frac{\rho}{r+\dfrac{1-r}{5}}\geqslant\log\frac{r+\dfrac{2(1-r)}{5}}{r+\dfrac{1-r}{5}}$$

$$=\int_{r-\frac{1-r}{5}}^{r+\frac{2(1-r)}{5}}\frac{dt}{t}>\frac{1-r}{5},$$

$$N\left(\rho,\ z_0,\ \frac{1}{f-a}\right)\leqslant T\left(\rho,\ z_0,\ \frac{1}{f-a}\right)$$

$$=T(\rho,z_0,f-a)+\log\frac{1}{|f(z_0)-a|}$$

$$\leqslant T(\rho,z_0,f)+\log^+|a|+\log 2+\log\frac{1}{|f(z_0)-a|},$$

于是

$$n\left(r+\frac{1-r}{5},\ z_0,f=a\right)$$

$$<\frac{5}{1-r}\left\{T(\rho,z_0,f)+\log^+|a|+\log\frac{1}{|f(z_0)-a|}+\log 2\right\}.$$

由(3.2.2)与(3.1.4)有

$$n\left(r+\frac{1-r}{5},\ z_0,f=a\right)$$

$$<\frac{5}{1-r}\left\{N\log\frac{80e}{1-r}+\log\frac{1}{|f(z_0),\ a|}+2\log 2\right\}.$$

因此

$$n(r,f=a)\leqslant n\left(r+\frac{1-r}{5},\ z_0,f=a\right)$$

$$<\frac{C}{1-r}\left\{(N+1)\log\frac{2}{1-r}+\log\frac{1}{|f(z_0),a|}\right\}.$$

(2) 在 L 上存在 z_1 使

$$|f'(z_1)| \geqslant 1, \tag{3.2.3}$$

而在 L 上从 z_0 至 z_1 的部分恒有 $|f'(z)| < 1$. 当 $|f'(z_0)| \geqslant 1$ 时，则取 z_1 为 z_0.

可以看出

$$|f(z_1)| \leqslant 2 \tag{3.2.4}$$

以及 $|\zeta| < r + \frac{4(1-r)}{5}$. 于是 $f(z)$ 在

$$|z - z_1| \leqslant |\zeta - z_1| + \frac{1-r}{10}$$

上亚纯，$f(z_1) \neq 0, 1, \infty; f'(z_1) \neq 0$. 应用定理 3.2 有

$$\begin{aligned}
&T\left(|\zeta - z_1| + \frac{1-r}{20}, z_1, f\right) \\
&\quad < 2\left\{N\left(|\zeta - z_1| + \frac{1-r}{10}, z_1, f = 0\right)\right. \\
&\qquad + N\left(|\zeta - z_1| + \frac{1-r}{10}, z_1, f = 1\right) \\
&\qquad \left.+ N\left(|\zeta - z_1| + \frac{1-r}{10}, z_1, f = \infty\right)\right\} \\
&\qquad + 191 + 4\log^+|f(z_1)| \\
&\qquad + 2\log^+\frac{1}{\left(|\zeta - z_1| + \frac{1-r}{10}\right)|f'(z_1)|} \\
&\qquad + 12\log^+\frac{|\zeta - z_1| + \frac{1-r}{10}}{\left(|\zeta - z_1| + \frac{1-r}{10}\right) - \left(|\zeta - z_1| + \frac{1-r}{20}\right)}.
\end{aligned}$$

如上可知

$$N\left(|\zeta - z_1| + \frac{1-r}{10}, z_1, f = 0\right)$$

$$+N\left(|\zeta-z_1|+\frac{1-r}{10},z_1,f=1\right)$$

$$+N\left(|\zeta-z_1|+\frac{1-r}{10},z_1,f=\infty\right)$$

$$<N\log\frac{2}{h}.$$

再计及(3.2.3),(3.2.4)与

$$\frac{1-r}{10}<|\zeta-z_1|+\frac{1-r}{10}<1,$$

遂有

$$T\left(|\zeta-z_1|+\frac{1-r}{20},z_1,f\right)$$

$$<2N\log\frac{2}{h}+191+4\log 2$$

$$+2\log\frac{10}{1-r}+12\log\frac{20}{1-r}$$

$$<2N\log\frac{2}{h}+238+14\log\frac{1}{1-r}. \tag{3.2.5}$$

在 $|z-z_1|\leqslant|\zeta-z_1|+\frac{1-r}{20}$ 上对 $f(z)$ 与点 ζ 应用 Poisson-Jensen 公式(定理 1.1),其中取

$$R_2=|\zeta-z_1|+\frac{1-r}{20},\ R_1=|\zeta-z_1|, \tag{3.2.6}$$

则

$$\log|f(\zeta)|\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(z_1+R_2e^{i\varphi})|$$

$$\times\frac{R_2^2-R_1^2}{R_2^2-2R_2R_1\cos(\theta-\varphi)+R_1^2}d\varphi$$

$$+\sum\log\left|\frac{R_2^2-\overline{(\beta_\mu-z_1)}(\zeta-z_1)}{R_2(\zeta-\beta_\mu)}\right|,$$

其中 β_μ 为 $|z-z_1|\leqslant R_2$ 内 $f(z)$ 的极点. 由

$$|R_2^2-\overline{(\beta_\mu-z_1)}(\zeta-z_1)|\leqslant R_2^2+R_2^2<2R_2,$$

有

$$\log|f(\zeta)|\leqslant\frac{R_2+R_1}{R_2-R_1}m(R_2,z_1,f)+\Sigma\log\frac{2}{|\zeta-\beta_\mu|}. \tag{3.2.7}$$

注意 $\zeta\in(\gamma)$ 有

$$\sum\log\frac{2}{|\zeta-\beta_\mu|}<N\log\frac{4}{h}. \tag{3.2.8}$$

将(3.2.5),(3.2.6)与(3.2.8)代入(3.2.7)便得

$$m(\rho,z_0,f)\leqslant\log^+|f(\zeta)|$$
$$<\frac{82}{1-r}\left\{N\log\frac{80e}{1-r}+119+7\log\frac{1}{1-r}\right\}.$$

再结合 $N(\rho,z_0,f)<N\log\dfrac{80e}{1-r}$ 有

$$T(\rho,z_0,f)<\frac{83}{1-r}\left\{N\log\frac{80e}{1-r}+119+7\log\frac{1}{1-r}\right\}. \tag{3.2.9}$$

如同情况(1), 对于任意复数 a 有

$$n(r,f=a)\leqslant n\left(r+\frac{1-r}{5},z_0,f=a\right)$$
$$<\frac{C}{(1-r)^2}\left\{(N+1)\log\frac{2}{1-r}+\log\frac{1}{|f(z_0),a|}\right\}.$$

3.2.2. 推广

现在我们将定理 3.3 作一些推广.

定理 3.4. 设函数 $f(z)$ 于 $|z|<R$ 内亚纯. 若

$$N=n(R,f=\alpha)+n(R,f=\beta)+n(R,f=\gamma),$$

其中 α,β,γ 为三个复数, 且其相互间的球距有一正的下界 d, 则对于 $0<r<R$ 和任意复数 a 有

$$n(r, f=a) < \frac{CR^7}{(R-r)^2}$$

$$\times \left\{(N+1)\log \frac{2R}{R-r} + \log^+ \frac{1}{d} + \log \frac{1}{|f(z_0), a|}\right\}.$$

于此 z_0 为 $|z| < R$ 内的一点.

证. 无妨设 $R = 1$. 否则作自变量的替换 $z = R\zeta$, 即可化为 $R = 1$ 的情况.

将 α, β, γ 的次序作适当调换后可设 $\max(|\alpha|, |\beta|) \leqslant |\gamma|$. 由于 α, β, γ 相互间的球距以 d 为下界,于是

$$|\alpha, \infty| \geqslant \frac{d}{2}, \quad |\beta, \infty| \geqslant \frac{d}{2}.$$

从而

$$|\alpha| < \frac{2}{d}, \qquad |\beta| < \frac{2}{d}.$$

置

$$g(z) = \frac{f(z)-\alpha}{f(z)-\beta} \cdot \frac{\gamma-\beta}{\gamma-\alpha},$$

则 $g(z)$ 在 $|z| < 1$ 内亚纯,且

$$N = n(1, g=0) + n(1, g=1) + n(1, g=\infty).$$

如同定理 3.3 的证明,先对 $g(z)$在 $|z| < 1$ 内的零点, 1-值点和极点作除外圆(γ),并取 $z_0 \bar{\in} (\gamma)$ 且 $|z_0| < \frac{1-r}{5}$. 无妨设 $|g(z_0)| \leqslant 1$, 否则只须调换 α 和 β 的位置即可. 圆周 $|z - z_0| = \rho$ 与(γ)无交,且 $r + \frac{2}{5}(1-r) \leqslant \rho \leqslant r + \frac{3}{5}(1-r)$. 仍区别情况(1)和(2),类似于(3.2.2)与(3.2.9)有

$$T(\rho, z_0, g) < \frac{C(N+1)}{1-r} \log \frac{2}{1-r}.$$

但是

$$
\begin{aligned}
T(\rho, z_0, f) &\leqslant T(\rho, z_0, f-\beta) + \log^+|\beta| + \log 2 \\
&= T\left(\rho, z_0, \frac{1}{f-\beta}\right) + \log|f(z_0)-\beta| + \log^+|\beta| + \log 2 \\
&\leqslant T\left(\rho, z_0, \frac{f-\alpha}{f-\beta}\right) + \log^+\frac{1}{|\beta-\alpha|} + \log 2 \\
&\quad + \log|f(z_0)-\beta| + \log^+|\beta| + \log 2 \\
&\leqslant T(\rho, z_0, g) + \log^+\left|\frac{\gamma-\alpha}{\gamma-\beta}\right| + \log^+\frac{1}{|\beta-\alpha|} \\
&\quad + \log^+|f(z_0)| + 2\log^+|\beta| + 3\log 2.
\end{aligned}
$$

注意到

$$
\begin{aligned}
\log^+\left|\frac{\gamma-\alpha}{\gamma-\beta}\right| &= \log^+\left|1+\frac{\beta-\alpha}{\gamma-\beta}\right| \\
&\leqslant \log^+|\beta| + \log^+|\alpha| + 2\log 2 + \log^+\frac{1}{|\gamma-\beta|},
\end{aligned}
$$

便有

$$
\begin{aligned}
T(\rho, z_0, f) &< T(\rho, z_0, g) \\
&\quad + C\left(\log\frac{1}{d}+1\right) + \log^+|f(z_0)| \\
&< C\left\{\frac{N+1}{1-r}\log\frac{2}{1-r} + \log\frac{1}{d}\right\} \\
&\quad + \log^+|f(z_0)|.
\end{aligned}
\tag{3.2.10}
$$

于是

$$
\begin{aligned}
n(r, f=a) &\leqslant n\left(r+\frac{1-r}{5}, z_0, f=a\right) \\
&\leqslant \frac{5}{1-r}N(\rho, z_0, f=a) \\
&< \frac{C}{(1-r)^2}\Big\{(N+1)\log\frac{2}{1-r} + \log^+\frac{1}{d} \\
&\quad + \log\frac{1}{|f(z_0), a|}\Big\}.
\end{aligned}
$$

3.2.3. Rauch 定理

为了以后的应用，我们还需要将定理 3.3 作进一步的推广，这就是 Rauch[1] 定理. 在证明 Rauch 定理前，我们先注意一简单事实.

引理 3.1. 设 $P(z)$ 为于 $|z| < R(\leqslant \infty)$ 亚纯的函数. 若对于 $0 < r_1 < r_2 < R$ 有

$$\frac{1}{\pi}\iint\limits_{r_1<|z|<r_2} \log^+|P(z)|d\sigma_z < \log\frac{1}{d} \qquad \left(0 < d < \frac{1}{2}\right),$$

则在区间 $[r_1, r_2]$ 上使

$$m(r, P) \leqslant \frac{\log\frac{1}{d}}{r_1(r_2 - r_1)}$$

成立的 r 值所成集合的测度不小于 $\frac{r_2 - r_1}{2}$.

证. 如果引理结论不成立，则在 $[r_1, r_2]$ 上使

$$m(r, P) > \frac{\log\frac{1}{d}}{r_1(r_2 - r_1)}$$

成立的 r 值所成集合的测度大于 $\frac{r_2 - r_1}{2}$. 于是

$$\int_{r_1}^{r_2} 2m(r, P)rdr > 2\frac{\log\frac{1}{d}}{r_1(r_2 - r_1)}\cdot r_1 \cdot \frac{r_2 - r_1}{2} = \log\frac{1}{d}.$$

但是上式左端为

$$\frac{1}{\pi}\iint\limits_{r_1<|z|<r_2} \log^+|P(z)|d\sigma_z,$$

按照引理假设它应小于 $\log\frac{1}{d}$，这便导得一个矛盾.

定理 3.5. 设函数 $f(z)$, $P(z)$, $Q(z)$, $R(z)$ 于 $|z| < 1$ 内亚

纯．又设在 $|z|<1$ 内，$f(z)$ 取 $P(z)$，$Q(z)$，$R(z)$ 的次数不超过 N，$P(z)$，$Q(z)$，$R(z)$，$P(z)-Q(z)$，$Q(z)-R(z)$ 与 $R(z)-P(z)$ 的零点与极点数目不超过 p．若

$$\frac{1}{\pi}\iint\limits_{|z|<1}\log^+\left(|P|+|Q|+\frac{1}{|P-Q|}+\frac{1}{|Q-R|}+\frac{1}{|R-P|}\right)d\sigma<\log\frac{1}{d},\qquad(3.2.11)$$

则对于 $0<r<1$ 和任意复数 a 有

$$n(r,f=a)<\frac{C}{(1-r)^2}\left\{(N+p)\log\frac{2}{1-r}+\log\frac{1}{d}+\log\frac{1}{|f(z_0),a|}\right\},\qquad(3.2.12)$$

其中 $|z_0|<1$．

证．在 $|z|<1$ 内，相应于 $f(z)-P(z)$，$f(z)-Q(z)$，$f(z)-R(z)$ 的零点以及数 $h=\frac{1-r}{160e}$ 应用 Boutroux-Cartan 定理，相应除外圆 $(\gamma)_1$ 的半径总和不超过 $2eh=\frac{1-r}{80}$．再相应于 $P(z)$，$Q(z)$，$R(z)$，$P(z)-Q(z)$，$Q(z)-R(z)$，$R(z)-P(z)$ 的所有零点和极点以及数 h 应用 Boutroux–Cartan 定理，相应除外圆 $(\gamma)_2$ 的半径总和不超过 $2eh=\frac{1-r}{80}$．命 (γ) 为 $(\gamma)_1$ 与 $(\gamma)_2$ 的并，(γ) 中诸圆直径总和不超过 $\frac{1-r}{20}$．

置

$$g(z)=\frac{f(z)-P(z)}{f(z)-Q(z)}\cdot\frac{R(z)-Q(z)}{R(z)-P(z)},$$

则 $g(z)$ 在 $|z|<1$ 内亚纯，且

$$n(1,g=0)+n(1,g=1)+n(1,g=\infty)\leqslant N+p.$$

选取 $z_0\bar{\in}(\gamma)$，$|z_0|<\frac{1-r}{5}$ 以及 $|g(z_0)|\leqslant 1$．在圆环

$$r+\frac{2}{5}(1-r)\leqslant |z-z_0|\leqslant r+\frac{3}{5}(1-r)$$

上选取 $|z-z_0|=\rho$ 与 (γ) 无交，并且

$$\begin{aligned}
&m(\rho, z_0, P)+m(\rho, z_0, Q)+m\left(\rho, z_0, \frac{1}{P-Q}\right)\\
&\quad+m\left(\rho, z_0, \frac{1}{Q-R}\right)+m\left(\rho, z_0, \frac{1}{R-P}\right)\\
&\leqslant 5\max\left\{m(\rho, z_0, P), m(\rho, z_0, Q), m\left(\rho, z_0, \frac{1}{P-Q}\right),\right.\\
&\quad\left. m\left(\rho, z_0, \frac{1}{Q-R}\right), m\left(\rho, z_0, \frac{1}{R-P}\right)\right\}\\
&\leqslant 5m\left(\rho, z_0, |P|+|Q|+\frac{1}{|P-Q|}\right.\\
&\quad\left.+\frac{1}{|Q-R|}+\frac{1}{|R-P|}\right)\\
&\leqslant \frac{5\log\frac{1}{d}}{\left(r+\frac{2}{5}(1-r)\right)\frac{1-r}{5}}\leqslant\frac{125\log\frac{1}{d}}{2(1-r)}.
\end{aligned}\tag{3.2.13}$$

按照 (γ) 的取法，(3.2.11) 与引理 3.1，这样的圆周总是可以取到的.

如同定理 3.3 的证明，在情况(1)和(2)时都有

$$T(\rho, z_0, g)<\frac{C(N+p+1)}{1-r}\log\frac{2}{1-r}.$$

但是

$$\begin{aligned}
T(\rho, z_0, f)&\leqslant T(\rho, z_0, f-Q)+T(\rho, z_0, Q)+\log 2\\
&=T\left(\rho, z_0, \frac{1}{f-Q}\right)+\log|f(z_0)-Q(z_0)|\\
&\quad+T(\rho, z_0, Q)+\log 2
\end{aligned}$$

$$\leqslant T\left(\rho, z_0, \frac{f-P}{f-Q}\right) + T\left(\rho, z_0, \frac{1}{Q-P}\right) + \log 2$$

$$+ \log |f(z_0) - Q(z_0)| + T(\rho, z_0, Q) + \log 2$$

$$\leqslant T(\rho, z_0, g) + T\left(\rho, z_0, \frac{R-P}{R-Q}\right)$$

$$+ T\left(\rho, z_0, \frac{1}{Q-P}\right) + T(\rho, z_0, Q)$$

$$+ \log |f(z_0) - Q(z_0)| + 2\log 2.$$

由 $\frac{R-P}{R-Q} = 1 + \frac{Q-P}{R-Q}$，有

$$T\left(\rho, z_0, \frac{R-P}{R-Q}\right) \leqslant T\left(\rho, z_0, \frac{1}{R-Q}\right) + T(\rho, z_0, P)$$

$$+ T(\rho, z_0, Q) + 2\log 2.$$

再计及

$$\log |f(z_0) - Q(z_0)| \leqslant \log^+|f(z_0)| + \log^+|Q(z_0)| + \log 2$$

$$\leqslant \log^+|f(z_0)| + T(\rho, z_0, Q) + \log 2,$$

于是

$$T(\rho, z_0, f) \leqslant T(\rho, z_0, g) + T\left(\rho, z_0, \frac{1}{R-Q}\right)$$

$$+ T\left(\rho, z_0, \frac{1}{Q-P}\right) + 3T(\rho, z_0, Q) + T(\rho, z_0, P)$$

$$+ 5\log 2 + \log^+|f(z_0)|.$$

由定理条件，$z_0 \bar{\in} (\gamma)_2$ 以及(3.2.13)式可知

$$3T(\rho, z_0, Q) + T(\rho, z_0, P)$$

$$+ T\left(\rho, z_0, \frac{1}{R-Q}\right) + T\left(\rho, z_0, \frac{1}{Q-P}\right)$$

$$\leqslant 3\left\{p\log\frac{2}{h} + \frac{125\log\frac{1}{d}}{2(1-r)}\right\}$$

$$\leqslant 3\left\{p\log\frac{320e}{1-r}+\frac{125\log\dfrac{1}{d}}{2(1-r)}\right\}.$$

因此

$$T(\rho, z_0, f) < \frac{C}{1-r}\left\{(N+p+1)\log\frac{2}{1-r}\right.$$

$$\left.+\log\frac{1}{d}\right\}+\log^+|f(z_0)|.$$

从而对于任意复数 a 有

$$n(r, f=a) \leqslant n\left(r+\frac{1-r}{5}, z_0, f=a\right)$$

$$\leqslant \frac{5}{1-r}N\left(\rho, z_0, \frac{1}{f-a}\right)$$

$$< \frac{5}{1-r}\left\{T(\rho, z_0, f-a)+\log\frac{1}{|f(z_0)-a|}\right\}$$

$$< \frac{C}{(1-r)^2}\left\{(N+p+1)\log\frac{2}{1-r}+\log\frac{1}{d}\right.$$

$$\left.+\log\frac{1}{|f(z_0), a|}\right\}.$$

§ 3.3. 充满圆与 Borel 方向

3.3.1. 两个引理

为了推导亚纯函数的充满圆与 Borel 方向，除了前两节的准备外，我们还需要两个引理.

设函数 $f(z)$ 于开平面亚纯，D 为一区域. 又设 $f(z)$ 在 D 内取某些复数 a 至少 N 次，且这些复数不能为半径总和为 1/2 的任意一组球面圆所覆盖.

将 D 划分为 p 个小区域 $D_j(j=1,2,\cdots,p)$. 对每个 j 作圆 K_j 包含 D_j，再作 K_j 的同心圆 K_j'，半径为 K_j 的 2 倍.

如果在每个 K'_j 内，$f(z)$取三个复数的次数不超过 n，且这三个复数间的球面距离不小于 d. 按照定理 3.4 在 K_j 内 $f(z)$取任意复数 a 的次数应小于

$$C\left\{n+\log\frac{1}{d}+\log\frac{1}{|a,A_j|}\right\}.$$

由

$$D=\left(\bigcup_{j=1}^{p}D_j\right)\subset\left(\bigcup_{j=1}^{p}K_j\right),$$

于是在D内 $f(z)$ 取任意复数 a 的次数应小于

$$C\left\{np+p\log\frac{1}{d}+\log\frac{1}{\prod_{j=1}^{p}|a,A_j|}\right\}.$$

对上式末项应用球面距离的 Boutroux-Cartan 定理(定理 3.1′)有

$$\prod_{j=1}^{p}|a,A_j|>h^p,$$

至多除去一些球面小圆 (γ),其半径总和不超过 $2eh$. 取 $h=\dfrac{1}{8e}$,

存在复数 $a\bar{\in}(\gamma)$, 同时 $n(D,f=a)\geqslant N$.

因此

$$\begin{aligned}N&\leqslant n(D,f=a)\\&<C\left\{np+p\log\frac{1}{d}+p\log 8e\right\}.\end{aligned}$$

若选取 $d=e^{-n}$ 则[1)]

$$N<Cnp.$$

即存在适当常数 C^* 使 $n>C^*\dfrac{N}{p}$.

---

1) 我们回忆，C 表示数字常数，但每次出现时不一定具有相同数字.

这样我们就有下述结论.

引理 3.2. 设 $f(z)$ 于开平面亚纯，区域 D, D_j, K_j, K'_j ($j=1, 2, \cdots, p$) 如上所设. 若使 $n(D, f=a) \geqslant N$ 成立的复数 a 在 Riemann 球上不能为半径总和等于 1/2 的任意一组球面圆所覆盖，则必存在一个圆 K'_j 与一个数字常数 C^* 使得 $f(z)$ 在 K'_j 内取任意复数至少 $C^* \frac{N}{p}$ 次，至多除去一些复数可含于两个球面半径为 $e^{-C^*\frac{N}{p}}$ 的圆内.

现在我们应用引理 3.2 作进一步的讨论.

设 $f(z)$ 于开平面亚纯，级为有穷，且不蜕化为有理函数. 将引理 3.2 中的 D 取为圆环 $r<|z|<R$. 先求出在这圆环内 $f(z)$ 取某些复数的次数的下界. 即估计 $n(R, f=a) - n(r, f=a)$.

注意

$$n(R, f=a) = \frac{n(R, f=a)}{\log \frac{R}{r}} \int_r^R \frac{dt}{t}$$

$$\geqslant \frac{N\left(R, \frac{1}{f-a}\right) - N\left(r, \frac{1}{f-a}\right)}{\log \frac{R}{r}},$$

以及对大于 1 的正数 k 有

$$n(r, f=a) = \frac{n(r, f=a)}{\log k} \int_r^{kr} \frac{dt}{t}$$

$$\leqslant \frac{1}{\log k} N(kr, f=a).$$

由 Nevanlinna 第二基本定理(定理 1.5′)可以看出当 R 适当大时使

$$N\left(R, \frac{1}{f-a}\right) > \frac{T(R, f)}{4}, \qquad |f(0), a| > \frac{1}{3} \quad (3.3.1)$$

成立的复数 a 不能为球面半径总和为 1/2 的任意一组球面圆覆盖.

取R充分大使上述结论与

$$T(R,f)\geqslant \max\left\{240,\ \frac{240\log\frac{R}{r}}{\log k},\ 12T(r,f),\ \frac{12T(kr,f)}{\log k}\log\frac{R}{r}\right\} \tag{3.3.2}$$

满足，这时有

$$\begin{aligned}
&n(R,f=a)-n(r,f=a)\\
\geqslant\ &\frac{N\left(R,\frac{1}{f-a}\right)}{\log\frac{R}{r}}-\frac{N\left(r,\frac{1}{f-a}\right)}{\log\frac{R}{r}}-\frac{N\left(kr,\frac{1}{f-a}\right)}{\log k}\\
\geqslant\ &\frac{\frac{1}{4}T(R,f)}{\log\frac{R}{r}}-\frac{T\left(r,\frac{1}{f-a}\right)}{\log\frac{R}{r}}-\frac{T\left(kr,\frac{1}{f-a}\right)}{\log k}\\
\geqslant\ &\frac{\frac{1}{4}T(R,f)}{\log\frac{R}{r}}-\frac{T(r,f)+\log\frac{1}{|f(0),a|}+\log 2}{\log\frac{R}{r}}\\
&-\frac{T(kr,f)+\log\frac{1}{|f(0),a|}+\log 2}{\log k}\\
\geqslant\ &\frac{T(R,f)}{4\log\frac{R}{r}}\left\{1-\frac{4T(r,f)}{T(R,f)}-\frac{4\log 6}{T(R,f)}-\frac{4T(kr,f)}{T(R,f)}\right.\\
&\left.\cdot\frac{\log\frac{R}{r}}{\log k}-\frac{4\log 6}{T(R,f)}\cdot\frac{\log\frac{R}{r}}{\log k}\right\}\\
\geqslant\ &\frac{T(R,f)}{15\log\frac{R}{r}}.
\end{aligned}$$

取充分大的正整数 q，将区域 $r < |z| < R$ 作如下划分：作 q 条由原点发出的半直线，两两间的夹角为 $\frac{2\pi}{q}$；再作圆弧

$$|z| = r, \ r\left(1+\frac{2\pi}{q}\right), \cdots, r\left(1+\frac{2\pi}{q}\right)^s,$$

其中

$$S = \left[\frac{\log\frac{R}{r}}{\log\left(1+\frac{2\pi}{q}\right)}\right] + 1.$$

于是 $r < |z| < R$ 被分为 p 个曲边四边形 D_j，其中

$$p \leqslant q\left\{\left[\frac{\log\frac{R}{r}}{\log\left(1+\frac{2\pi}{q}\right)}\right]+1\right\} < \frac{q^2\log\frac{R}{r}}{2}.$$

记 D_j 的中心为 z_j，则可以看出 D_j 含于 $|z-z_j| < \frac{2\pi}{q}|z_j|$ 内.

应用引理 3.2 于函数 $f(z)$，则有以下结论.

引理 3.3. 设 $f(z)$ 于开平面亚纯，级为有穷，不蜕化为有理函数. 则在 $r < |z| < R$ 内必存在点 z_j，使得在 $|z-z_j| < \frac{4\pi}{q}|z_j|$ 内 $f(z)$ 取任意复数至少

$$n = C^*\frac{T(R,f)}{q^2\left(\log\frac{R}{r}\right)^2} \qquad (3.3.3)$$

次，至多除去一些复数可含于两个球面半径为 e^{-n} 的圆内.

上述结论当(3.3.2)式成立以及 R，q 适当大时即成立.

以上假定 $f(z)$ 为有穷级，是由于在(3.3.1)中要求

$$N\left(R, \frac{1}{f-a}\right) > \frac{T(R,f)}{4}.$$

当 $f(z)$ 为无穷级时，可能存在例外区间. 但当 R 适当大时，在[R，

$2R$]上可以选取 R' 不属于例外区间. 这时如上可得

$$n(2R, f=a) - n(r, f=a)$$

$$\geqslant \frac{N\left(2R, \frac{1}{f-a}\right)}{\log \frac{2R}{r}} - \frac{N\left(r, \frac{1}{f-a}\right)}{\log \frac{2R}{r}} - \frac{N\left(kr, \frac{1}{f-a}\right)}{\log k}.$$

由于 R' 不属于例外区间,使

$$N\left(R', \frac{1}{f-a}\right) > \frac{T(R', f)}{4}, \qquad |f(0), a| > \frac{1}{3}$$

成立的复数 a 不能为球面半径总和为 1/2 的任意一组球面圆覆盖. 对于这样的复数 a 有

$$N\left(2R, \frac{1}{f-a}\right) \geqslant N\left(R', \frac{1}{f-a}\right)$$

$$\geqslant \frac{1}{4} T(R', f) \geqslant \frac{1}{4} T(R, f).$$

于是类似于引理 3.3 的推导可得

引理 3.4. 设 $f(z)$ 于开平面亚纯, 不蜕化为有理函数, 则在 $r < |z| < 2R$ 内必存在点 z_j, 使得在 $|z - z_j| < \frac{4\pi}{q} |z_j|$ 内 $f(z)$ 取任意复数至少

$$n = C^* \frac{T(R, f)}{q^2 \left(\log \frac{R}{r}\right)^2}$$

次,至多除去一些复数可含于球面半径为 e^{-n} 的两个圆内. 上述结论当

$$T(R, f) \geqslant \max\left\{240, \frac{240 \log(2R)}{\log k},\right.$$

$$\left. 12T(r, f), \frac{12T(kr, f)}{\log k} \log \frac{2R}{r}\right\} \tag{3.3.4}$$

以及 R, q 适当大时成立.

3.3.2. 亚纯函数的充满圆与 Julia 方向

在定理 2.9 里我们已经看到任何一个超越整函数都具有 Julia 方向. 但是对于超越亚纯函数,情况却有些不同. A. Ostrowski[1] 曾举出简单的超越亚纯函数 $f(z)$ 的例子,其增长性为

$$T(r, f) = O((\log r)^2) \quad (r \to \infty),$$

并且 $f(z)$ 不具有 Julia 方向.

虽然如此,我们有

定理 3.6. 设函数 $f(z)$ 于开平面亚纯,且

$$\lim_{r\to\infty} \frac{T(r, f)}{(\log r)^2} = \infty, \tag{3.3.5}$$

则必存在一列圆

$$\Gamma_j: |z - z_j| < \varepsilon_j |z_j|, \ \lim_{j\to\infty} |z_j| = \infty, \ \lim_{j\to\infty} \varepsilon_j = 0$$
$$(j = 1, 2, \cdots),$$

使得在每个 Γ_j 内, $f(z)$取任意复数至少 n_j 次,至多除去一些复数可含于两个球面半径为 e^{-n_j} 的圆内,这里 $\lim\limits_{j\to\infty} n_j = \infty$.

具有定理所述性质的圆 Γ_j 称为 $f(z)$ 的一列充满圆.

证. 由(3.3.5)式可取一列趋于∞的正数(r_k),使

$$\lim_{k\to\infty} \frac{T(r_k, f)}{(\log r_k)^2} = \infty.$$

取 r_{k_1} 适当大,并使

$$T(r_{k_1}, f) \geqslant \max\left\{240, \ \frac{240 \log(2r_{k_1})}{\log 2}, 12T(1, f), \right.$$
$$\left. \frac{12T(2, f)}{\log 2} \log(2r_{k_1}) \right\}$$

以及使

$$q_1 = \frac{T(r_{k_1}, f)^{\frac{1}{4}}}{(\log r_{k_1})^{\frac{1}{2}}}$$

适当大. 应用引理 3.4,在 $1 < |z| < 2r_{k_1}$ 内存在点 z_1 使在

$$\Gamma_1: |z - z_1| < \frac{4\pi}{q_1}|z_1|$$

内 $f(z)$ 取任意复数至少

$$n_1 = C^* \frac{T(r_{k_1}, f)^{\frac{1}{2}}}{\log r_{k_1}}$$

次，至多除去一些复数可含于球面半径为 e^{-n_1} 的两个圆内.

取 $r_{k_1'}$ 使 $r_{k_1'} > 3r_{k_1}$. 再取 r_{k_2} 使

$$T(r_{k_2}, f) \geqslant \max\left\{240, \frac{240\log(2r_{k_2})}{\log 2}, 12T(r_{k_1'}, f),\right.$$

$$\left.\frac{12T(2r_{k_1'}, f)}{\log 2}\log(2r_{k_2})\right\}$$

以及

$$q_2 = \frac{T(r_{k_2}, f)^{\frac{1}{2}}}{(\log r_{k_2})^{\frac{1}{2}}}.$$

应用引理 3.4，在 $r_{k_1'} < |z| < 2r_{k_2}$ 内存在点 z_2，使在

$$\Gamma_2: |z - z_2| < \frac{4\pi}{q_2}|z_2|$$

内 $f(z)$ 取任意复数至少

$$n_2 = C^* \frac{T(r_{k_2}, f)^{\frac{1}{2}}}{\log r_{k_2}}$$

次，至多除去一些复数可含于球面半径为 e^{-n_2} 的两个圆内.

将这个步骤继续下去，我们就可得到一列圆，具有定理 3.6 所述的性质.

系. 设 $f(z)$ 于开平面亚纯，适合条件 (3.3.5)，则必存在一条由原点发出的半直线 J: $\arg z = \theta_0 (0 \leqslant \theta_0 < 2\pi)$，使得在角顶位于原点以 J 为平分角线的任意小的角域内，$f(z)$ 取任意复数无穷多次，至多可能有两个复数例外.

事实上，根据定理 3.6 $f(z)$具有一列充满圆 $\Gamma_j: |z - z_j| < \varepsilon_j|z_j|$. 即在每个 Γ_j 内 $f(z)$取任意复数至少 n_j 次，至多除去一

些复数可含于球面半径为 e^{-n_j} 的两个圆内，且 $\lim\limits_{j\to\infty} n_j=\infty$.

$\{e^{i\arg z_j}, j=1,2,\cdots\}$ 至少有一个聚点，记为 $e^{i\theta_0}(0\leqslant\theta_0<2\pi)$，则半直线 $J:\arg z=\theta_0$ 就具有所要求的性质. 因若不然，即存在以原点为角顶以 J 为平分角线的某小角域 Ω，在 Ω 内 $f(z)$ 不取三个判别的复数 $a_\nu(\nu=1,2,3)$. 但是 Ω 内包含 $\Gamma_j(j=1,2,\cdots)$ 的一个子序列，为符号简便计，将此子序列仍记为 Γ_j. 当 j 充分大时可以使 $2e^{-n_j}<\max\limits_{1\leqslant\mu\neq\nu\leqslant 3}\{|a_\mu,a_\nu|\}$. 于是 $a_\nu(\nu=1,2,3)$ 中至少有一个，例如 a_1，不属于球面半径为 e^{-n_j} 的两个小圆. 即 $f(z)$ 在 Γ_j 内取 a_1 至少 n_j 次. 这与在 Ω 内 $f(z)$ 不取 a_1 相矛盾.

具有系理所述性质的方向称为亚纯函数 $f(z)$ 的 Julia 方向.

3.3.3. 亚纯函数的 λ 级充满圆与 Borel 方向

现在我们对有穷正级亚纯函数推导更强的结论.

定理 3.7. 设函数 $f(z)$ 于开平面亚纯，级 λ 为有穷正数，则必存在一列圆

$$\Gamma_j: |z-z_j|<\varepsilon_j|z_j|,\ \lim_{j\to\infty}\varepsilon_j=0,\quad \lim_{j\to\infty}|z_j|=\infty$$
$$(j=1,2,\cdots)$$

使得在每个 Γ_j 内 $f(z)$ 取任意复数至少 $|z_j|^{\lambda-\delta_j}$ 次，至多除去一些复数可含于球面半径为 $e^{-|z_j|^{\lambda-\delta_j}}$ 的圆内，且 $\lim\limits_{j\to\infty}\delta_j=0$.

Γ_j 称为 $f(z)$ 的一列 λ 级充满圆.

证. 由于 $f(z)$ 的级为 λ，可取一列趋于∞的正数 r_k 使

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\log T(r_k,f)}{\log r_k}=\lambda.$$

取 r_{k_1} 适当大使

$$T(r_{k_1},f)\geqslant\max\left\{240,\frac{240\log r_{k_1}}{\log 2},12T(1,f),\right.$$
$$\left.\frac{12T(2,f)}{\log 2}\log r_{k_1}\right\}$$

以及

$$q_1 = \log r_{k_1}.$$

当 k_1 适当大时可以应用引理 3.3，在 $1 < |z| < r_{k_1}$ 内存在 z_1 使在 $\Gamma_1: |z - z_1| < \dfrac{4\pi}{\log r_{k_1}} |z_1|$ 内 $f(z)$ 取任意复数至少

$$n_1 = C^* \frac{T(r_{k_1}, f)}{(\log r_{k_1})^4}$$

次，至多除去一些复数可含于球面半径为 e^{-n_1} 的两个圆内。

取 $r_{k_1'}$ 使 $r_{k_1} > 2r_{k_1'}$. 再取 r_{k_2} 使

$$T(r_{k_2}, f) \geqslant \max\left\{240, \frac{240 \log r_{k_2}}{\log 2}, 12T(r_{k_1'}, f),\right.$$
$$\left.\frac{12T(2r_{k_1'}, f)}{\log 2} \log r_{k_2}\right\}$$

以及

$$q_2 = \log r_{k_2},$$

则在 $r_{k_1'} < |z| < r_{k_2}$ 内存在 z_2 使在 $\Gamma_2: |z - z_2| < \dfrac{4\pi}{\log r_{k_2}} |z_2|$ 内 $f(z)$ 取任意复数至少

$$n_2 = C^* \frac{T(r_{k_2}, f)}{(\log r_{k_2})^4}$$

次，至多除去一些复数可含于球面半径为 e^{-n_2} 的两个圆内。

将这个步骤继续下去，便可得到一列圆。显然

$$n_j = C^* \frac{T(r_{k_j}, f)}{(\log r_{k_j})^4} > r_{k_j}^{\lambda - \varepsilon'_{k_j}} > |z_{k_j}|^{\lambda - \varepsilon'_{k_j}},$$

于是这列圆便具有定理 3.7 所述的性质。

为了导出 Borel 方向，我们先引进有关的记号。设函数 $f(z)$ 于开平面亚纯，$\arg z = \theta_0 (0 \leqslant \theta_0 < 2\pi)$ 为从原点发出的一条半直线，对于正数 r，适当小的正数 ε 和任意复数 a，以 $n(r, \theta_0, \varepsilon, f = a)$ $\left(\text{或 } n\left(r, \theta_0, \varepsilon, \dfrac{1}{f-a}\right)\text{，当 } a = \infty \text{ 时记为 } n(r, \theta_0, \varepsilon, f)\right)$ 表示在

区域$(|z|\leqslant r)\cap(|\arg z-\theta_0|\leqslant\varepsilon)$上 $f(z)-a$ 的零点数，重级零点须按其重数计算.（当 $a=\infty$ 时，则为 $f(z)$ 的极点数.）

定理 3.8. 设函数 $f(z)$ 于开平面亚纯，级 λ 为有穷正数，则必存在一条由原点发出的半直线 $B:\arg z=\theta_0(0\leqslant\theta_0<2\pi)$ 使得对于任意正数 ε 和每个复数 a 都有

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log n(r,\theta_0,\varepsilon,f=a)}{\log r}=\lambda,\qquad(3.3.6)$$

至多可能除去两个例外的复数.

证. 根据定理 3.7，$f(z)$ 具有一列 λ 级充满圆 $\Gamma_j:|z-z_j|<\varepsilon_j|z_j|$，使得在每个 Γ_j 内 $f(z)$ 取任意复数至少 $|z_j|^{\lambda-\delta_j}$ 次，至多除去一些复数可含于球面半径为 $e^{-|z_j|^{\lambda-\delta_j}}$ 的两个圆 S_j 和 S_j' 内，其中 $\lim\limits_{j\to\infty}\delta_j=0$.

记$\{e^{i\arg z_j},j=1,2,\cdots\}$的一个聚点为 $e^{i\theta_0}(0\leqslant\theta_0<2\pi)$，则半直线 $B:\arg z=\theta_0$ 就具有所要求的性质. 因若不然，则存在以原点为角顶以 B 为平分角线的某角域 $\Omega_0:|\arg z-\theta_0|<\varepsilon_0$ 以及三个判别的复数 $a_\nu(\nu=1,2,3)$ 使得

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log n(r,\theta_0,\varepsilon_0,f=a_\nu)}{\log r}<\lambda\ (\nu=1,2,3)\quad(3.3.7)$$

但是在 Ω 内包含了 $\Gamma_j(j=1,2,\cdots)$的一个无穷子列，为符号简便计，将此子列仍记为 Γ_j. 当 j 充分大时可以使

$$2e^{-|z_j|^{\lambda-\delta_j}}<\max_{1\leqslant\mu\neq\nu\leqslant3}\{|a_\mu,a_\nu|\}.$$

于是 $a_\nu(\nu=1,2,3)$ 中至少有一个，例如 a_1，不属于 S_{j_l} 和 $S_{j_l}'(l=1,2,\cdots)$，其中 S_{j_l} 和 S_{j_l}' 是 S_j 和 S_j' 的子序列. 即 $f(z)$ 在 Γ_{j_l} 内取 a_1 至少 $|z_{j_l}|^{\lambda-\delta_{j_l}}$ 次，于是

$$\begin{aligned}\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log n(r,\theta_0,\varepsilon,f=a_1)}{\log r}&\geqslant\overline{\lim_{l\to\infty}}\frac{\log n(\Gamma_{j_l},f=a_1)}{\log(2|z_{j_l}|)}\\&\geqslant\lim_{l\to\infty}\frac{\log(|z_{j_l}|^{\lambda-\delta_{j_l}})}{\log(2|z_{j_l}|)}=\lambda.\end{aligned}$$

这与(3.3.7)矛盾. 于是定理得证.

具有定理所述性质的方向称为 $f(z)$ 的 λ 级 Borel 方向,或简称为 $f(z)$ 的 Borel 方向. 也有的学者把它称为 Borel-Valiron 方向,因为是 1928 年 G. Valiron[3] 首先得到这种方向的.

对于亚纯函数的 Borel 方向有过很多研究工作. 例如 M. Biernacki[1] 建立了下述定理.

定理 3.8′. 设函数 $f(z)$ 于开平面亚纯,级 λ 为有穷正数,则存在一条从原点出发的半直线 (B): $\arg z=\theta_0(0\leqslant\theta_0<2\pi)$ 使得对于级小于 λ 的任意亚纯函数 $\Pi(z)$(包括 $\Pi(z)$ 蜕化为常数的情况)恒有

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log n(r,\theta_0,\varepsilon,f=\Pi)}{\log r}=\lambda, \qquad (3.3.8)$$

至多可能除去两个例外的函数.

A. Rauch[1] 进一步发展了 Biernacki 的结果. 为了叙述 Rauch 的结果,我们先引进亚纯函数收敛类和发散类的概念.

设 $f(z)$ 于开平面亚纯,级 λ 为有穷正数,若积分

$$\int^{\infty}\frac{T(r,f)}{r^{\lambda+1}}dr \qquad (3.3.9)$$

为有穷值,则称 $f(z)$ 属于 λ 级收敛类;若积分(3.3.9)等于无穷,则称 $f(z)$ 属于 λ 级发散类.

定理 3.8″. 设函数 $f(z)$ 于开平面亚纯,属于 λ 级发散类,则存在一条从原点出发的半直线 (B): $\arg z=\theta_0(0\leqslant\theta_0<2\pi)$ 使得对于级小于 λ 或者属于 λ 级收敛类的任意亚纯函数 $\Pi(z)$ 恒有

$$\int^{\infty}n(r,\theta_0,\varepsilon,f=\Pi)\frac{dr}{r^{\lambda+1}}=\infty, \qquad (3.3.10)$$

至多可能除去两个例外的函数.

定理 3.8′ 和定理 3.8″ 可以借助定理 3.5 进行证明,有兴趣的读者可参阅他们的原文. 近年来在 Borel 方向上也有一些有趣的结果,在以后的章节里还要予以论述.

§ 3.4. Borel 方向的一些性质

3.4.1. 一个引理

为了以后的应用，我们需要与 Borel 方向有关的一些性质.

我们先证明一个引理.

引理 3.5. 设 $f(z)$于开平面亚纯，$r_j(j=1,2,\cdots)$ 是 $f(z)$ 的极点的模，按非减的顺序排列，重级极点计算其重数. 若 σ 为一正数，则级数

$$\sum r_j^{-\sigma}$$

与积分

$$\int^{\infty}\frac{n(t,f)}{t^{\sigma+1}}\,dt,\qquad \int^{\infty}\frac{N(t,f)}{t^{\sigma+1}}\,dt$$

必定同时收敛或发散.

证. 采用 Stieltjes 积分的记号，不难看出

$$\sum_{j=j_0}^{J}\frac{1}{r_j^{\sigma}}=\int_{r_0}^{R}\frac{1}{t^{\sigma}}\,dn(t,f)=\frac{n(R,f)}{R^{\sigma}}-\frac{n(r_0,f)}{r_0^{\sigma}}+\int_{r_0}^{R}\frac{\sigma n(t,f)}{t^{\sigma+1}}\,dt. \tag{3.4.1}$$

当 $\sum r_j^{-\sigma}$ 收敛时，显然 $\int^{\infty}\frac{n(t,f)}{t^{\sigma+1}}dt$ 也收敛.

反之，如果 $\int^{\infty}\frac{n(t,f)}{t^{\sigma+1}}dt$ 收敛，则当 R 充分大时有

$$1>\int_R^{\infty}\frac{n(t,f)}{t^{\sigma+1}}\,dt\geqslant n(R,f)\int_R^{\infty}\frac{dt}{t^{\sigma+1}}=\frac{n(R,f)}{\sigma R^{\sigma}}.$$

结合(3.4.1)可知 $\sum r_j^{-\sigma}$ 也收敛.

如果代替 (3.4.1) 式，考虑

$$\int_{r_0}^{R}\frac{n(t,f)}{t^{\sigma+1}}\,dt=\int_{r_0}^{R}\frac{1}{t^{\sigma}}\,dN(t,f)$$

$$=\frac{N(R,f)}{R^{\sigma}}-\frac{N(r_0,f)}{r_0^{\sigma}}+\int_{r_0}^{R}\frac{\sigma N(t,f)}{t^{\sigma+1}}dt,$$

则如上可证积分 $\int^{\infty}\frac{n(t,f)}{t^{\sigma+1}}dt$ 与 $\int^{\infty}\frac{N(t,f)}{t^{\sigma+1}}dt$ 同时收敛或发散.

同样地可以证明

引理 3.5′. 设 $f(z)$ 于开平面亚纯，$0\leqslant\theta_0<2\pi,\eta>0$，$a$ 为一复数. 又设 $r_j(\theta_0,\eta,f=a)$ $(j=1,2,\cdots)$ 是 $f(z)-a$ 在 $|\arg z-\theta_0|\leqslant\eta$ 内零点的模，按非减的顺序排列，重级零点计算其重数（当 $a=\infty$ 时相应地为 $f(z)$ 的极点）；以及命

$$N\left(r,\theta_0,\eta,\frac{1}{f-a}\right)$$

$$=\int_0^r\frac{n\left(t,\theta_0,\eta,\frac{1}{f-a}\right)-n\left(0,\theta_0,\eta,\frac{1}{f-a}\right)}{t}dt$$

$$+n\left(0,\theta_0,\eta,\frac{1}{f-a}\right)\log r.$$

若 σ 为一正数，则级数

$$\sum\{r_j(\theta_0,\eta,f=a)\}^{-\sigma}$$

与积分

$$\int^{\infty}\frac{n\left(t,\theta_0,\eta,\frac{1}{f-a}\right)}{t^{\sigma+1}}dt,\quad\int^{\infty}\frac{N\left(t,\theta_0,\eta,\frac{1}{f-a}\right)}{t^{\sigma+1}}dt$$

必定同时收敛或发散.

3.4.2. 亚纯函数在角域内的性质

定理 3.9. 设函数 $f(z)$ 在角域 $|\arg z-\theta_0|<\eta$ 内亚纯，并且存在三个判别的复数 $a_\nu(\nu=1,2,3)$ 和正数 σ 使得级数

$$\sum\{r_k(\theta_0,\eta,f=a_\nu)\}^{-\sigma}\quad(\nu=1,2,3)\tag{3.4.2}$$

收敛，则对于任意正数 ε，级数

$$\sum\{r_k(\theta_0,\eta-\varepsilon,f=a)\}^{-\sigma}$$

对所有的复数 a 收敛，至多可能除去一个线性测度为 0 的集合.

证. 用由原点出发的半直线等分角域 $|\arg z - \theta_0| < \eta - \varepsilon$，使得每个小角域的开度不超过 $\varepsilon/4$，这些小角域的总数

$$J \leqslant \left[\frac{2(\eta - \varepsilon)}{\frac{\varepsilon}{4}}\right] + 1.$$

再取一适当大的正数 r_0，以原点为心，用

$$r_0,\quad r_0\left(1 + \frac{\varepsilon}{4}\right),\quad r_0\left(1 + \frac{\varepsilon}{4}\right)^2,\ \cdots$$

为半径的圆弧等分角域 $|\arg z - \theta_0| < \eta - \varepsilon$. 这样将 $(|z| > r_0) \cap (|\arg z - \theta_0| < \eta - \varepsilon)$ 分为一些小曲边四边形 $\Omega_{jl}(j=1,2,\cdots, J; l = 1,2,\cdots)$. 对于每个 Ω_{jl} 存在小圆 Γ_{jl} 及半径为其二倍的同心小圆 Γ'_{jl} 使得

$$\Omega_{jl} \subset \Gamma_{jl} \subset \Gamma'_{jl} \subset (|\arg z - \theta_0| < \eta).$$

不难看出对于每个 $\Gamma'_{j_0l_0}$，和它相交的其他 Γ'_{jl} 的数目有一固定的上界. 例如可以取上界为 100.

由于级数(3.4.2)收敛，应用引理 3.5′ 有

$$\int^{\infty} \frac{n(r, \theta_0, \eta, f = a_\nu)}{r^{\sigma+1}} dr < \infty \quad (\nu = 1,2,3).$$

但是根据定理 3.4[1] 在每个 Γ'_{jl} 内有

$$n(\Omega_{jl}, f = a) < C \left\{\sum_{\nu=1}^{3} n(\Gamma'_{jl}, f = a_\nu) + \log \frac{1}{e^{-(r_0(1+\frac{\varepsilon}{4})^l)^{\frac{\sigma}{2}}}}\right\}, \tag{3.4.3}$$

至多除去一些复数，可含于球面半径为 $e^{-(r_0(1+\frac{\varepsilon}{4})^l)^{\frac{\sigma}{2}}}$ 的圆 e_{jl} 内.

记

$$e_l = \bigcup_{j=1}^{J} e_{jl}, \qquad e = \bigcap_{k=1}^{\infty}\left(\bigcup_{l=k}^{\infty} e_l\right).$$

---

1) 注意 $a_\nu(\nu = 1,2,3)$ 互相判别，d 为一确定正数，因此在(3.4.3)中它可以包含在最后一项里.

可以看出

$$\operatorname{mes} e = \lim_{k\to\infty} \operatorname{mes}\left(\bigcup_{l=k}^{\infty} e_l\right) = 0.$$

对于任意复数 a，$a\bar{\in} e$，则必存在一个 l_0 使 $a\bar{\in} \bigcup_{l=l_0}^{\infty} e_l$. 于是当 $l \geqslant l_0$ 时对于 $j = 1, 2, \cdots, J$ 和复数 a 恒有(3.4.3)式，从而

$$\sum_{l=l_0}^{L} \sum_{j=1}^{J} n(Q_{jl}, f = a)$$

$$< C\left\{\sum_{l=l_0}^{L} \sum_{j=1}^{J} \sum_{\nu=1}^{3} n(\Gamma'_{jl}, f = a_\nu) + J \sum_{l=l_0}^{L} \left(r_0\left(1 + \frac{\varepsilon}{4}\right)^l\right)^{\frac{\sigma}{2}}\right\}.$$

故

$$n(r, \theta_0, \eta - \varepsilon, f = a)$$

$$< C\left\{\sum_{\nu=1}^{3} n(2r, \theta_0, \eta, f = a_\nu) + (2r)^{\frac{\sigma}{2}}\right\}.$$

因此对不属于集 e 的任意复数 a 有

$$\int^{\infty} \frac{n(r, \theta_0, \eta - \varepsilon, f = a)}{r^{\sigma+1}} dr < \infty.$$

再由引理 3.5′ 便得定理结论.

应用定理 3.9 我们可以推出下述重要事实.

定理 3.10. 设 $f(z)$ 于开平面亚纯，级 λ 为有穷正数. 若 $f(z)$ 在角域 $\theta_1 < \arg z < \theta_2$ 内没有 λ 级 Borel 方向，则对适当小的任意正数 α 存在三个互相判别的复数 $a_\nu(\nu = 1, 2, 3)$ 和正数 τ，$\tau < \lambda$，使得[1]

---

1) 对于区域 G，我们用 $n(G, f = a)$表示域 G 内 $f(z) - a$ 的零点数，重级零点须计及其重数.

$$\sum_{\nu=1}^{3} n\{(|z| \leqslant r) \cap (\theta_1 + \alpha \leqslant \arg z \leqslant \theta_2 - \alpha), f = a_\nu\} < r^\tau.$$

(3.4.4)

证. 对于$[\theta_1 + \alpha, \theta_2 - \alpha]$上的每个值 φ，因为 $\arg z = \varphi$ 不是 $f(z)$的 λ 级 Borel 方向，按照定义必定存在三个互相判别的复数 $\beta_j(\varphi)$，正数 $\varepsilon(\varphi)$ 以及正数 $\tau(\varphi)$，$\tau(\varphi) < \tau$，使得

$$n\{(|z| \leqslant r) \cap (\varphi - \varepsilon(\varphi) \leqslant \arg z \leqslant \varphi + \varepsilon(\varphi)),$$
$$f = \beta_j(\varphi)\} < r^{\tau(\varphi)} \quad (j = 1, 2, 3).$$

于是对于 $\tau_1(\varphi)$，$\tau(\varphi) < \tau_1(\varphi) < \lambda$，有

$$\int^{\infty} n\Big((|z| \leqslant t) \cap (\varphi - \varepsilon(\varphi) \leqslant \arg z \leqslant \varphi + \varepsilon(\varphi)),\ f = \beta_j(\varphi)\Big)$$
$$\cdot \frac{dt}{t^{\tau_1(\varphi)+1}} < \infty \quad (j = 1,2,3).$$

根据引理 3.5′ 级数

$$\sum\{r(\varphi, \varepsilon(\varphi), f = \beta_j(\varphi))\}^{-\tau_1(\varphi)} \qquad (j = 1,2,3)$$

收敛. 应用定理 3.9，对于任意复数 a 级数

$$\sum\left\{r\left(\varphi, \frac{\varepsilon(\varphi)}{2}, f = a\right)\right\}^{-\tau_1(\varphi)}$$

收敛，至多可能除去关于 a 的一个线性测度为 0 的集 $e(\varphi)$.

注意 $\left\{\left(\varphi - \frac{\varepsilon(\varphi)}{2}, \varphi + \frac{\varepsilon(\varphi)}{2}\right): \varphi_1 + \alpha \leqslant \varphi \leqslant \varphi_2 - \alpha\right\}$ 构成了闭区间$[\varphi_1 + \alpha, \varphi_2 - \alpha]$的一组开覆盖，因此存在有穷个区间 $\left(\varphi_l - \frac{\varepsilon_l}{2}, \varphi_l + \frac{\varepsilon_l}{2}\right)$ $(l = 1, 2, \cdots, L; \varepsilon_l = \varepsilon(\varphi_l))$ 是 $[\varphi_1 + \alpha, \varphi_2 - \alpha]$的一组开覆盖.

相应于每个 φ_l，例外的零测度集为 $e_l = e(\varphi_l)$. 置

$e = \bigcup_{l=1}^{L} e_l$，它仍为零测度集. 命 $\tau_1 = \max_{1 \leqslant l \leqslant L}\{\tau_1(\varphi_l)\}$，则

$0 < \tau_1 < \lambda$. 对于任意复数 a，只要 $a \bar{\in} e$，就有

$$\sum\left\{r\left(\varphi_l, \frac{\varepsilon_l}{2}, f = a\right)\right\}^{-\tau_1} < \infty \quad (l = 1, 2, \cdots, L).$$

于是

$$\sum\left\{r\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2},\ \frac{\theta_2-\theta_1}{2}-\alpha, f=a\right)\right\}^{-\tau_1}<\infty.$$

根据引理 3.5′ 有

$$\int^{\infty} n((|z|\leqslant t)\cap(\theta_1+\alpha\leqslant \arg z\leqslant \theta_2-\alpha), f=a)$$

$$\cdot\frac{dt}{t^{\tau_1+1}}<\infty.$$

因此对不属于 e 的任意三个判别的复数 $a_\nu(\nu=1,2,3)$ 与正数 τ，$\tau_1<\tau<\lambda$，有(3.4.4)式.

3.4.3. Borel 方向决定一列充满圆

在 §3.3 里，我们曾经看到从亚纯函数的一个 λ 级充满圆的序列可以导出 Borel 方向. 反过来从亚纯函数的 Borel 方向也可以得到 λ 级充满圆的序列. 这就是下述的 A. Rauch[1] 的一个结果.

定理 3.11. 设 $f(z)$ 于开平面亚纯，级 λ 为有穷正数. 若

$$B: \arg z=\theta_0(0\leqslant\theta_0<2\pi)$$

为 $f(z)$ 的一条 Borel 方向，则必存在一列圆

$$\Gamma_j: |z-z_j|<\varepsilon_j|z_j|,\ z_j=|z_j|e^{i\theta_0},$$

$$\lim_{j\to\infty}|z_j|=\infty,\quad \lim_{j\to\infty}\varepsilon_j=0\qquad(j=1,2,\cdots)$$

使得在每个 Γ_j 内，$f(z)$ 取任意复数至少 $|z_j|^{\lambda-\delta_j}$ 次，至多可能除去一些复数含于球面半径为 2^{-j} 的两个圆内，其中 $\lim\limits_{j\to\infty}\delta_j=0$.

证、取以原点为顶点以 B 为平分角线的一个小角域

$$\Omega: |\arg z-\theta_0|<\frac{\eta}{2}.$$

用 $|z|=2^j(j=1,2,\cdots)$将此角域分为一些小四边形

$$\Omega_j: (2^j\leqslant|z|<2^{j+1})\cap\left(|\arg z-\theta_0|<\frac{\eta}{2}\right).$$

对于每个 Ω_j，再用 $s-1$ 条圆弧 $2^j(1+\eta)$，$2^j(1+\eta)^2$，$\cdots$，$2^j(1+\eta)^{s-1}$ (其中 s 由关系式 $2^j(1+\eta)^{s-1}<2^{j+1}\leqslant 2^j(1+\eta)^s$

确定)进行分割,形成了 s 个小四边形 $Q_{jl}(l=1,2,\cdots,s)$. 作圆 Γ_{jl} 含 Q_{jl} 于其内,且半径不超过 $C\cdot 2^{j+1}\eta$. 再作 Γ_{jl} 的同心圆 Γ'_{jl}, 半径为其 2 倍. 在每个 Γ'_{jl} 内命

$$n_{jl}=\min\left\{\sum_{\nu=1}^{3} n(\Gamma'_{jl}, f=a_\nu)\right\}.$$

上式右端的最小值是对所有的三个复数的组合取的, 只要这三个复数相互间的球面距离 $\geqslant 2^{-j}$. 应用定理 3.4, 在 Q_{jl} 内 $f(z)$ 取任意复数 a 的次数不超过

$$C\{n_{jl}+j\},$$

可能除去一些复数含于球面半径为 2^{-j} 的圆内.

对于每个固定的 j, 有 s 个除外的球面小圆. 因此当 j 变动时,所有的除外球面小圆的半径总和为

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{s}{2^j}.$$

取 j_0 充分大可使

$$\sum_{j=j_0}^{\infty}\frac{s}{2^j}<\frac{1}{2}.$$

由于 B 是 $f(z)$ 的 λ 级 Borel 方向,于是对小于 λ 的任意正数 τ,级数

$$\sum\left\{r_n\left(\theta_0,\frac{\eta}{2}, f=a\right)\right\}^{-\tau}$$

对于任意复数 a 发散,至多可能除去两个例外值. 取复数 a_0 不是例外值,也不属于从 $j=j_0$ 起的所有的除外球面小圆,则

$$\sum\left\{r_n\left(\theta_0,\frac{\eta}{2}, f=a\right)\right\}^{-\tau}=\infty. \tag{3.4.5}$$

另一方面,对每个 j 若置

$$n_j=\max_{1\leqslant l\leqslant s} n_{jl},$$

则

$$\sum\left\{r_n\left(\theta_0,\frac{\eta}{2}, f=a\right)\right\}^{-\tau}$$

$$< C\left\{\sum_j \frac{s n_j}{2^{j\tau}} + \sum_j \frac{sj}{2^{j\tau}}\right\}$$

$$< C\left\{\sum_j \frac{n_j}{\eta 2^{j\tau}} + \sum_j \frac{j}{\eta 2^{j\tau}}\right\},\ (0 < \tau < \lambda). \qquad (3.4.6)$$

选取一列单调递减趋向于 0 的正数序列 (η_l) 以及一列单调递增趋向于 λ 的正数序列 (τ_l). 由 $\sum_j \frac{j}{\eta_1 2^{j\tau_1}} < \infty$, 并计及(3.4.5), (3.4.6)有 $\sum_j \frac{n_j}{\eta_1 2^{j\tau_1}} = \infty$. 从而可以选取 j_1 使

$$n_{j_1} > \frac{\eta_1 2^{(j_1+1)\tau_1}}{j_1^2} > 2^{(j_1+1)(2\tau_1-\lambda)}.$$

同样由 $\sum_{j=j_1+1}^{\infty} \frac{j}{\eta_2 2^{j\tau_2}} < \infty$, 有 $\sum_{j=j_1+1}^{\infty} \frac{n_j}{\eta_2 2^{j\tau_2}} = \infty$. 从而可以选取 $j_2 > j_1$, 使

$$n_{j_2} > \frac{\eta_2 2^{(j_2+1)\tau_2}}{j_2^2} > 2^{(j_2+1)(2\tau_2-\lambda)}.$$

于是存在一列圆 Γ_l: $|z - z_l| < C\eta_l |z_l|$, $\arg z_l = \theta_0$, 且在 Γ_l 内 $f(z)$ 取任意复数至少 $|z_l|^{\lambda-2(\lambda-\tau_l)}$ 次, 至多除去两个球面半径为 2^{-j_l} 的圆. 定理从而得证.

第四章　亚纯函数结合于导数的值分布

在整函数与亚纯函数值分布论中，有一个富有意义的方向，就是将函数取值与其导数取值联合起来研究. 在这方面有很多研究工作，本章将扼要地加以论述.

§4.1. $T(r,f)$ 与 $T(r,f')$ 增长性的比较

我们先比较 $T(r,f)$ 与 $T(r,f')$ 的增长性，并证明 $f(z)$ 与 $f'(z)$ 有相同的级与下级.

4.1.1. 两个引理

对于亚纯函数 $f(z)$，以后我们将要看到用 $T(r,f)$ 来界囿 $T(r,f')$相当容易. 但是要用 $T(r,f')$ 来界囿 $T(r,f)$ 却比较困难，在这方面有庄圻泰[3]建立的不等式. 为了得到这个不等式，我们先证明他的两个引理.

引理 4.1. 设函数 $f(z)$ 于开平面亚纯，且 $f(0)\neq\infty$. 若 R 与 R' 为两个正数，$R<R'$，则存在实数 θ_0 使得对于 $0\leqslant r\leqslant R$ 有

$$\log^+|f(re^{i\theta_0})|\leqslant\frac{R'+R}{R'-R}m(R',f)+n(R',f)\log 4$$
$$+N(R',f). \tag{4.1.1}$$

证. 对于 $z=re^{i\theta}$, $0\leqslant r\leqslant R$. 若 $f(z)\neq\infty$，则由 Poisson-Jensen 公式有

$$\log|f(z)|\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(R'e^{i\varphi})|$$
$$\times\frac{R'^2-r^2}{R'^2-2R'r\cos(\varphi-\theta)+r^2}d\varphi$$

$$+\sum_{|b_\mu|\leqslant R'}\log\left|\frac{R'^2-\bar{b}_\mu z}{R'(z-b_\mu)}\right|,$$

其中 b_μ 为 $f(z)$ 在 $|z|\leqslant R'$ 上的极点. 于是

$$\log^+|f(z)|\leqslant\frac{R'+r}{R'-r}m(R',f)+\sum_{|b_\mu|\leqslant R'}\log\frac{2R'}{|z-b_\mu|}$$

$$\leqslant\frac{R'+r}{R'-r}m(R',f)+\log\frac{(2R')^{n(R',f)}}{\prod_{|b_\mu|\leqslant R'}|z-b_\mu|}. \quad (4.1.2)$$

记 $b_\mu=|b_\mu|e^{i\varphi_\mu}$, 则

$$|re^{i\theta}-|b_\mu|e^{i\varphi_\mu}|\geqslant|b_\mu||\sin(\theta-\varphi_\mu)|.$$

从而

$$\prod_{|b_\mu|\leqslant R'}|z-b_\mu|\geqslant\left(\prod_{\mu=1}^{n(R',f)}|b_\mu|\right)\left(\prod_{\mu=1}^{n(R',f)}|\sin(\theta-\varphi_\mu)|\right). \quad (4.1.3)$$

但是

$$\int_0^\pi\log\left|\prod_{\mu=1}^{n(R',f)}\sin(\theta-\varphi_\mu)\right|d\theta$$

$$=n(R',f)\int_0^\pi\log|\sin\theta|d\theta$$

$$=-n(R',f)\pi\log 2.$$

于是至少存在一个实数 θ_0 使得

$$\left|\prod_{\mu=1}^{n(R',f)}\sin(\theta_0-\varphi_\mu)\right|>\frac{1}{2^{n(R',f)}}. \quad (4.1.4)$$

显然 $z=re^{i\theta_0}(0\leqslant r\leqslant R)$决不是 $f(z)$的极点,否则上式左端有一个因子为 0. 将(4.1.3),(4.1.4)代入(4.1.2),对于 $0\leqslant r\leqslant R$ 有

$$\log^+|f(re^{i\theta_0})|\leqslant\frac{R'+R}{R'-R}m(R',f)+\log 4^{n(R',f)}$$

$$+\sum\log\frac{R'}{|b_\mu|}\leqslant\frac{R'+R}{R'-R}m(R',f)$$

$$+n(R',f)\log 4+N(R',f).$$

引理 4.2. 设 $f(z)$ 于开平面亚纯，R, R' 与 R'' 为三个正数且 $R < R' < R''$，则存在正数 ρ 使得 $R \leqslant \rho \leqslant R'$，且在 $|z| = \rho$ 上有

$$\log^+|f(z)| \leqslant \frac{R''+R'}{R''-R'} m(R'', f) + n(R'', f) \log \frac{8eR''}{R'-R}. \tag{4.1.5}$$

证. 设 $b_\mu(\mu = 1, 2, \cdots, n(R'', f))$ 为 $f(z)$ 在 $|z| \leqslant R''$ 上的极点. 根据 Boutroux-Cartan 定理有

$$\prod_{\mu=1}^{n(R'',f)} |z - b_\mu| \geqslant \left(\frac{R'-R}{4e}\right)^{n(R'',f)}, \tag{4.1.6}$$

除去一些点可含于半径总和不超过 $\frac{R'-R}{2}$ 的一组圆 (γ) 内. 于是在圆环 $R \leqslant |z| \leqslant R'$ 上存在圆周 $|z| = \rho$ 与 (γ) 无交. 从而在 $|z| = \rho$ 上恒有(4.1.6)式.

对于 $|z| = \rho$ 上任意点 z，应用 Poisson-Jensen 公式并计及(4.1.6)有

$$\log^+|f(z)| \leqslant \frac{R''+\rho}{R''-\rho} m(R'', f) + \sum_{|b_\mu| \leqslant R''} \log \left| \frac{R''^2 - \bar{b}_\mu z}{R''(z - b_\mu)} \right|$$

$$\leqslant \frac{R''+R'}{R''-R'} m(R'', f) + n(R'', f) \log \frac{8eR''}{R'-R}.$$

4.1.2. $T(r, f)$ 与 $T(r, f')$ 的比较

现在我们证明庄圻泰[3]的不等式.

定理 4.1. 设函数 $f(z)$ 于开平面亚纯，且 $f(0) \neq \infty$，则对于 $\tau > 1$ 与 $r > 0$ 有

$$T(r, f) < C_\tau T(\tau r, f') + \log^+(\tau r) + 4 + \log^+|f(0)|. \tag{4.1.7}$$

证. 取 σ 使 $\sigma^3 = \tau$，并记 $r_1 = \sigma r$, $r_2 = \sigma r_1$, $r_3 = \sigma r_2$. 对于 $f'(z)$ 应用引理 4.1，存在实数 θ_0 使得 $0 \leqslant t \leqslant r_1$ 时有

$$\log^+|f'(te^{i\theta})| \leqslant \frac{r_2+r_1}{r_2-r_1} m(r_2, f') + n(r_2, f') \log 4 + N(r_2, f') \qquad (4.1.8)$$

根据引理 4.2，在 $[r, r_1]$ 上存在 ρ 使得在 $|z|=\rho$ 上有

$$\log^+|f'(z)| \leqslant \frac{r_2+r_1}{r_2-r_1} m(r_2, f') + n(r_2, f') \log \frac{8er_2}{r_1-r}. \qquad (4.1.9)$$

由原点出发，沿着 $\arg z=\theta_0$ 至 $\rho e^{i\theta_0}$，再沿着 $|z|=\rho$ 转一圈后回到 $\rho e^{i\theta_0}$. 这个曲线段记为 L，其长度为 $(2\pi+1)\rho$. 设 $|f'(z)|$ 在 L 上的最大值为 M，则对于 $|z|=\rho$ 上的任意点 z 有

$$|f(z)| \leqslant |f(0)| + M(2\pi+1)\rho.$$

于是

$$\log^+|f(z)| \leqslant \log^+|f(0)| + \log^+ M + \log^+\rho + \log 8\pi.$$

但由(4.1.8)与(4.1.9)可知

$$\begin{aligned}\log^+ M &\leqslant \frac{r_2+r_1}{r_2-r_1} m(r_2, f') + n(r_2, f') \log \frac{8er_2}{r_1-r} + N(r_2, f') \\ &\leqslant \left\{\frac{\log \dfrac{8er_2}{r_1-r}}{\log \dfrac{r_3}{r_2}} + \frac{r_2+r_1}{r_2-r_1}\right\} T(r_3, f') \\ &= \left\{\frac{\log \dfrac{8e\sigma^2}{\sigma-1}}{\log \sigma} + \frac{\sigma+1}{\sigma-1}\right\} T(r_3, f') \\ &= C'_\tau T(r_3, f').\end{aligned}$$

因此

$$m(\rho, f) < C'_\tau T(r_3, f') + \log^+(\tau r) + 4 + \log^+|f(0)|.$$

从而

$$\begin{aligned}T(r, f) &\leqslant T(\rho, f) \\ &< (C'_\tau+1) T(r_3, f') + \log^+(\tau r) + 4 + \log^+|f(0)|.\end{aligned}$$

系. 设函数 $f(z)$ 于开平面亚纯，则当 $r\to\infty$ 时有

$$T(r, f) < O\{T(2r, f') + \log r\}. \qquad (4.1.10)$$

当 $f(0)\neq\infty$ 时，从定理 4.1 立即可得(4.1.10)．当 $f(0)=\infty$ 时，记 $R(z)$ 为 $f(z)$ 在原点 Laurent 展式的主要部分，并命

$$g(z)=f(z)-R(z),$$

则 $g(0)\neq\infty$．于是

$$T(r,g)<O\{T(2r,g')+\log r\}.$$

但是

$$T(r,f)=T(r,g)+O(\log r),$$
$$T(2r,g')=T(2r,f')+O(\log r),$$

这时也得到(4.1.10)式.

定理 4.2. 设函数 $f(z)$于开平面亚纯，则 $f(z)$与其导数 $f'(z)$ 有相同的级与下级.

证．由

$$\begin{aligned}T(r,f')&=m(r,f')+N(r,f')\\&\leqslant m(r,f)+m\left(r,\frac{f'}{f}\right)+2N(r,f)\\&\leqslant 2T(r,f)+m\left(r,\frac{f'}{f}\right)\end{aligned}$$

可知，$f'(z)$ 的级与下级不超过 $f(z)$ 的级与下级.

另一方面由定理 4.1 的系可知 $f(z)$的级与下级也不超过 $f'(z)$ 的级与下级．这样便证明了定理结论.

$f(z)$与 $f'(z)$有相同的级，最初是 G. Valiron 的论断，第一个完善的证明则是 J. M. Whittaker[1] 给出的.

若 $f(z)$ 为有穷级整函数，则

$$\begin{aligned}T(r,f')=m(r,f')&\leqslant m(r,f)+m\left(r,\frac{f'}{f}\right)\\&=(1+o(1))T(r,f).\end{aligned}$$

于是

$$\varlimsup_{r\to\infty}\frac{T(r,f')}{T(r,f)}\leqslant 1.$$

R. Nevanlinna[2] 曾猜测，对于有穷级整函数 $f(z)$ 有

$$\lim_{r\to\infty}\frac{T(r,f')}{T(r,f)}=1.$$

1965 年 W. K. Hayman[3] 否定了这个猜测. 为了叙述其结果，我们必须引进一个概念——集合的下对数密度.

设 E 为 $[1,\infty)$ 内确定的一个集合. 命 $E(r)$ 为 E 在区间 $[1,r]$ 上的部分，则 E 的下对数密度为

$$\underline{\log\ \mathrm{dens}}\, E=\varliminf_{r\to\infty}\frac{\displaystyle\int_{E(r)}\frac{dt}{t}}{\log r}.$$

Hayman[3] 证明了:

任给两个正数 λ,K，则必存在 λ 级整函数 $f(z)$，在 r 的一个集合 E 上有

$$T(r,f)>KT(r,f'),$$

并且 $\underline{\log\ \mathrm{dens}}\ E>0$.

最近 S. Toppila[2] 构造了有穷级整函数 $f(z)$，使得对于所有充分大的 r 都有

$$\frac{T(r,f)}{T(r,f')}\geqslant 1+\frac{7}{10^7}.$$

§ 4.2. 结合于导数的模分布

4.2.1. 对数导数基本引理的推广

为了对结合于导数的值分布问题进行讨论，我们需要以下引理，它是 Nevanlinna 对数导数的基本引理的推广，是由熊庆来[2]给出的.

引理 4.3. 设函数 $f(z)$ 于 $|z|<R(\leqslant\infty)$ 内亚纯. 若 $f(0)\neq 0,\infty$，则对于 $0<r<\rho<R$ 有

$$m\left(r,\frac{f^{(k)}}{f}\right)<C_k\left\{1+\log^+\log^+\frac{1}{|f(0)|}+\log^+\frac{1}{r}\right.$$
$$\left.+\log^+\frac{1}{\rho-r}+\log^+\rho+\log^+T(\rho,f)\right\}.\qquad(4.2.1)$$

这里 C_k 为仅依于 k 的常数[1].

证. 当 $k=1$ 时,由 Nevanlinna 引理(引理1.3)(4.2.1)显然成立. 设(4.2.1)式对于 $k=1,2,\cdots,l-1$ 已经成立,我们将证明它对于 $k=l$ 也成立.

若 $z=re^{i\theta}$, 从 Poisson-Jensen 公式有

$$\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(\rho e^{i\varphi})|\frac{2\rho e^{i\varphi}}{(\rho e^{i\varphi}-z)^2}d\varphi$$

$$+\sum_{|a_\mu|\leqslant\rho}\left\{\frac{1}{z-a_\mu}+\frac{\bar a_\mu}{\rho^2-\bar a_\mu z}\right\}$$

$$-\sum_{|b_\nu|\leqslant\rho}\left\{\frac{1}{z-b_\nu}+\frac{\bar b_\nu}{\rho^2-\bar b_\nu z}\right\},$$

这里 a_μ, b_ν 分别表示 $f(z)$ 在 $|z|\leqslant\rho$ 上的零点与极点,重级值点须计算其重数.

于是

$$\frac{d^{l-1}}{dz^{l-1}}\left(\frac{f'}{f}\right)=\frac{l!}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(\rho e^{i\varphi})|\frac{2\rho e^{i\varphi}}{(\rho e^{i\varphi}-z)^{l+1}}d\varphi$$

$$+(l-1)!\sum_{|a_\mu|\leqslant\rho}\left\{\frac{(-1)^{l-1}}{(z-a_\mu)^l}+\frac{\bar a_\mu^l}{(\rho^2-\bar a_\mu z)^l}\right\}$$

$$-(l-1)!\sum_{|b_\nu|\leqslant\rho}\left\{\frac{(-1)^{l-1}}{(z-b_\nu)^l}+\frac{\bar b_\nu^l}{(\rho^2-\bar b_\nu z)^l}\right\}.$$

可以看出

$$\left|\frac{(-1)^{l-1}}{(z-a_\mu)^l}+\frac{\bar a_\mu^l}{(\rho^2-\bar a_\mu z)^l}\right|\leqslant\frac{1}{|z-a_\mu|^l}+\frac{\rho^l}{|\rho^2-\bar a_\mu z|^l}$$

$$\leqslant\left|\frac{\rho^2-\bar a_\mu z}{\rho(z-a_\mu)}\right|^l\left\{\frac{\rho^l}{|\rho^2-\bar a_\mu z|^l}+\frac{\rho^{2l}|z-a_\mu|^l}{|\rho^2-\bar a_\mu z|^{2l}}\right\}$$

$$\leqslant\left|\frac{\rho^2-\bar a_\mu z}{\rho(z-a_\mu)}\right|^l\left\{\frac{1}{(\rho-r)^l}+\frac{(2\rho)^l}{(\rho-r)^{2l}}\right\}$$

$$\leqslant\left|\frac{\rho^2-\bar a_\mu z}{\rho(z-a_\mu)}\right|^l\cdot\frac{2^{l+1}\rho^l}{(\rho-r)^{2l}}.$$

---

1) 以后我们总是用 C_k 表示仅依于 k 的常数,但它每次出现时不必具有相同的值,不每次赘述.

同样

$$\left|\frac{(-1)^{l-1}}{(z-b_\nu)^l}+\frac{\bar{b}_\nu^l}{(\rho^2-\bar{b}_\nu z)^l}\right|$$

$$\leqslant\left|\frac{\rho^2-\bar{b}_\nu z}{\rho(z-b_\nu)}\right|^l\cdot\frac{2^{l+1}\rho^l}{(\rho-r)^{2l}}.$$

因此

$$\left|\frac{d^{l-1}}{dz^{l-1}}\left(\frac{f'}{f}\right)\right|\leqslant l!\frac{2\rho}{(\rho-r)^{l+1}}\left\{2T(r,f)+\log^+\frac{1}{|f(0)|}\right\}$$

$$+\frac{2^{l+1}\rho^l}{(\rho-r)^{2l}}\left\{\sum_{|a_\mu|\leqslant\rho}\left|\frac{\rho^2-\bar{a}_\mu z}{\rho(z-a_\mu)}\right|^l\right.$$

$$\left.+\sum_{|b_\nu|\leqslant\rho}\left|\frac{\rho^2-\bar{b}_\nu z}{\rho(z-b_\nu)}\right|^l\right\}. \tag{4.2.2}$$

注意

$$\frac{d^{l-1}}{dz^{l-1}}\left(\frac{f'}{f}\right)=\frac{f^{(l)}}{f}+P_l\left(\frac{f'}{f},\frac{f''}{f},\cdots,\frac{f^{(l-1)}}{f}\right),$$

其中 P_l 为 l 次多项式. 于是

$$\log^+\left|\frac{f^{(l)}}{f}\right|\leqslant C_l\left\{\sum_{k=1}^{l-1}\log^+\left|\frac{f^{(k)}}{f}\right|+1\right\}$$

$$+\log^+\left|\frac{d^{l-1}}{dz^{l-1}}\left(\frac{f'}{f}\right)\right|.$$

结合归纳法假设与(4.2.2)式便有

$$m\left(r,\frac{f^{(l)}}{f}\right)<C_l\left\{1+\log^+\log^+\frac{1}{|f(0)|}+\log^+\frac{1}{r}\right.$$

$$\left.+\log^+\frac{1}{\rho-r}+\log^+\rho+\log^+T(\rho,f)\right\}$$

$$+m\left(r,\sum_{|a_\mu|\leqslant\rho}\left|\frac{\rho^2-\bar{a}_\mu z}{\rho(z-a_\mu)}\right|^l+\sum_{|b_\nu|\leqslant\rho}\left|\frac{\rho^2-\bar{b}_\nu z}{\rho(z-b_\nu)}\right|^l\right). \tag{4.2.3}$$

但是

$$m\left(r,\ \sum_{|a_\mu|\le\rho}\left|\frac{\rho^2-\bar{a}_\mu z}{\rho(z-a_\mu)}\right|^l+\sum_{|b_\nu|\le\rho}\left|\frac{\rho^2-\bar{b}_\nu z}{\rho(z-b_\nu)}\right|^l\right)$$

$$\le l\sum_{|a_\mu|\le\rho}m\left(r,\ \frac{\rho^2-\bar{a}_\mu z}{\rho(z-a_\mu)}\right)$$

$$+l\sum_{|b_\nu|\le\rho}m\left(r,\ \frac{\rho^2-\bar{b}_\nu z}{\rho(z-b_\nu)}\right)$$

$$+\log\left(n\left(\rho,\ \frac{1}{f}\right)+n(\rho,f)\right). \qquad (4.2.4)$$

在第一章引理 1.3 的证明中，对于 $0<r<\rho<\rho'<R$ 曾有

$$\sum_{|a_\mu|\le\rho}m\left(r,\ \frac{\rho^2-\bar{a}_\mu z}{\rho(z-a_\mu)}\right)+\sum_{|b_\nu|\le\rho}m\left(r,\ \frac{\rho^2-\bar{b}_\nu z}{\rho(z-b_\nu)}\right)$$

$$=N\left(\rho,\ \frac{1}{f}\right)+N(\rho,f)-N\left(r,\ \frac{1}{f}\right)-N(r,f)$$

$$\le\frac{\rho'(\rho-r)}{r(\rho'-r)}\left\{2T(\rho',f)+\log^+\frac{1}{|f(0)|}\right\}.$$

选取

$$\rho=r+\frac{r(\rho'-r)}{2\rho'\left\{T(\rho',f)+\log^+\frac{1}{|f(0)|}+1\right\}} \qquad (4.2.5)$$

后，即有

$$\sum_{|a_\mu|\le\rho}m\left(r,\ \frac{\rho^2-\bar{a}_\mu z}{\rho(z-a_\mu)}\right)$$

$$+\sum_{|b_\nu|\le\rho}m\left(r,\ \frac{\rho^2-\bar{b}_\nu z}{\rho(z-b_\nu)}\right)\le 1. \qquad (4.2.6)$$

由(4.2.5)易见

$$\rho'-\rho=(\rho'-r)-(\rho-r)>$$

$$\rho'-r-\frac{\rho'-r}{2}=\frac{\rho'-r}{2},$$

故

$$n(\rho, f) + n\left(\rho, \frac{1}{f}\right)$$

$$\leqslant \frac{1}{\log \frac{\rho'}{\rho}} \left\{N(\rho', f) + N\left(\rho', \frac{1}{f}\right)\right\}$$

$$\leqslant \frac{\rho'}{\rho' - \rho} \left\{ 2T(\rho', f) + \log^+ \frac{1}{|f(0)|} \right\}$$

$$< \frac{2\rho'}{\rho' - r} \left\{ 2T(\rho', f) + \log^+ \frac{1}{|f(0)|} \right\}. \qquad (4.2.7)$$

由(4.2.5)还有

$$\log^+ \frac{1}{\rho - r} \leqslant \log^+ \frac{1}{r} + \log^+ \rho' + \log^+ \frac{1}{\rho' - r}$$

$$+ \log^+ T(\rho', f) + \log^+ \log^+ \frac{1}{|f(0)|} + \log 6. \qquad (4.2.8)$$

将(4.2.4),(4.2.6),(4.2.7)和(4.2.8)代入(4.2.3),即有

$$m\left(r, \frac{f^{(l)}}{f}\right) < C_l \left\{1 + \log^+ \log^+ \frac{1}{|f(0)|} + \log^+ \frac{1}{r}\right.$$

$$\left. + \log^+ \frac{1}{\rho' - r} + \log^+ \rho' + \log^+ T(\rho', f)\right\}.$$

根据归纳法,引理便得证.

4.2.2. Milloux 不等式

在亚纯函数结合于其导数的模分布方面,1940 年 H. Milloux[2] 首先获得下述结果.

定理 4.3. 设 $f(z)$ 在 $|z| < R(\leqslant \infty)$ 内亚纯. 若 $f(0) \neq 0, \infty; f^{(k)}(0) \neq 1; f^{(k+1)}(0) \neq 0$, 则对于 $0 < r < R$ 有

$$T(r, f) < \overline{N}(r, f) + N\left(r, \frac{1}{f}\right) + N\left(r, \frac{1}{f^{(k)} - 1}\right)$$

$$- N\left(r, \frac{1}{f^{(k+1)}}\right) + S(r, f), \qquad (4.2.9)$$

其中

$$S(r,f)=m\left(r,\frac{f^{(k)}}{f}\right)+m\left(r,\frac{f^{(k+1)}}{f}\right)+m\left(r,\frac{f^{(k+1)}}{f^{(k)}-1}\right)$$

$$+\log\left|\frac{f(0)(f^{(k)}(0)-1)}{f^{(k+1)}(0)}\right|+\log 2. \qquad (4.2.10)$$

证．我们从恒等式

$$\frac{1}{f}=\frac{f^{(k)}}{f}-\frac{f^{(k)}-1}{f^{(k+1)}}\cdot\frac{f^{(k+1)}}{f}$$

出发得

$$m\left(r,\frac{1}{f}\right)\leqslant m\left(r,\frac{f^{(k)}}{f}\right)+m\left(r,\frac{f^{(k)}-1}{f^{(k+1)}}\right)$$

$$+m\left(r,\frac{f^{(k+1)}}{f}\right)+\log 2.$$

但由 Jensen-Nevanlinna 公式((1.2.5)式)有

$$m\left(r,\frac{1}{f}\right)=T(r,f)-N\left(r,\frac{1}{f}\right)+\log\frac{1}{|f(0)|}$$

以及

$$m\left(r,\frac{f^{(k)}-1}{f^{(k+1)}}\right)=m\left(r,\frac{f^{(k+1)}}{f^{(k)}-1}\right)$$

$$+\left\{N\left(r,\frac{f^{(k+1)}}{f^{(k)}-1}\right)-N\left(r,\frac{f^{(k)}-1}{f^{(k+1)}}\right)\right\}$$

$$+\log\left|\frac{f^{(k)}(0)-1}{f^{(k+1)}(0)}\right|.$$

于是

$$T(r,f)\leqslant N\left(r,\frac{1}{f}\right)+\left\{N\left(r,\frac{f^{(k+1)}}{f^{(k)}-1}\right)\right.$$

$$\left.-N\left(r,\frac{f^{(k)}-1}{f^{(k+1)}}\right)\right\}+S(r,f), \qquad (4.2.11)$$

其中 $S(r,f)$ 由(4.2.10)式表示．

应用引理 1.2 有

$$N\left(r, \frac{f^{(k+1)}}{f^{(k)}-1}\right)-N\left(r, \frac{f^{(k)}-1}{f^{(k+1)}}\right)$$

$$=N\left(r, \frac{1}{f^{(k)}-1}\right)+N(r, f^{(k+1)})$$

$$-N(r, f^{(k)})-N\left(r, \frac{1}{f^{(k+1)}}\right). \qquad (4.2.12)$$

注意到 $f^{(k)}(z)$ 与 $f^{(k+1)}(z)$ 以且仅以 $f(z)$ 的极点为它们的极点. 当 $f(z)$ 以某点 z_0 为 $j(\geqslant 1)$ 重极点时, $f^{(k)}(z)$ 以 z_0 为 $j+k$ 重极点, $f^{(k+1)}(z)$ 以 z_0 为 $j+k+1$ 重极点. 从而

$$N(r, f^{(k+1)})-N(r, f^{(k)})=\bar{N}(r, f). \qquad (4.2.13)$$

将(4.2.12)与(4.2.13)代回(4.2.11),便得定理结论.

应用引理 4.3,我们可以对 Milloux 不等式的余项进行讨论.

设 $f(z)$ 于开平面亚纯. 当 $f(z)$ 的级 λ 为有穷时,取 $\rho=2r$ 则

$$\log^+T(\rho, f)=O(\log r), \qquad (r\to\infty).$$

结合引理 4.3 有

$$m\left(r, \frac{f^{(k)}}{f}\right)=O(\log r).$$

再由

$$T(\rho, f^{(k)})=N(\rho, f^{(k)})+m(\rho, f^{(k)})$$

$$\leqslant N(\rho, f)+k\bar{N}(\rho, f)+m(\rho, f)+m\left(\rho, \frac{f^{(k)}}{f}\right)$$

$$\leqslant (k+1)T(\rho, f)+O(\log\rho),$$

便得

$$\log^+T(\rho, f^{(k)})=O(\log r).$$

于是

$$m\left(r, \frac{f^{(k+1)}}{f^{(k)}-1}\right)=O(\log r).$$

因此当 $f(z)$ 为有穷级时, Milloux 不等式的余项有

$$S(r, f)=O(\log r).$$

当 $f(z)$ 为无穷级时，取 $\rho = r + \frac{1}{T(r, f)}$，由引理 4.3 与引理 1.4 有

$$m\left(r, \frac{f^{(l)}}{f}\right) = O\{\log(rT(r, f))\}, \quad (l = k, k+1)$$

至多可能除去一个线性测度为有穷的除外集. 在 (4.2.10) 所表示的余项 $S(r, f)$ 中仅须再估计 $m\left(r, \frac{f^{(k+1)}}{f^{(k)} - 1}\right)$. 我们先对 r 和 $\rho' = \frac{r+\rho}{2}$ 应用 Nevanlinna 引理，

$$\begin{aligned} m\left(r, \frac{f^{(k+1)}}{f^{(k)} - 1}\right) &< 10 + 4\log^+\log^+\frac{1}{|f^{(k)}(0) - 1|} \\ &+ 2\log^+\frac{1}{r} + 3\log^+\frac{1}{\rho' - r} + 4\log^+\rho' \\ &+ 4\log^+T(\rho', f^{(k)} - 1) < 10 + 7\log 2 \\ &+ 4\log^+\log^+\frac{1}{|f^{(k)}(0) - 1|} + 2\log^+\frac{1}{r} + 3\log^+\frac{1}{\rho - r} \\ &+ 4\log^+\rho + 4\log^+T(\rho', f^{(k)}). \end{aligned} \tag{4.2.14}$$

由

$$T(\rho', f^{(k)}) \leqslant (k+1)T(\rho', f) + m\left(\rho', \frac{f^{(k)}}{f}\right),$$

有

$$\begin{aligned} 4\log^+T(\rho', f^{(k)}) &\leqslant 4\log(k+1) + 4\log^+T(\rho', f) \\ &\quad + 4\log^+m\left(\rho', \frac{f^{(k)}}{f}\right) + 4\log 2 \\ &\leqslant 4\log(k+1) + 4\log^+T(\rho, f) \\ &\quad + m\left(\rho', \frac{f^{(k)}}{f}\right) + 4(\log 4 - 1) + 4\log 2. \end{aligned} \tag{4.2.15}$$

再应用引理 4.3

$$m\left(\rho', \frac{f^{(k)}}{f}\right) < C_k\left\{1 + \log^+\log^+\frac{1}{|f(0)|}\right.$$

$$+\log^+\frac{1}{\rho'}+\log^+\frac{1}{\rho-\rho'}+\log^+\rho+\log^+T(\rho,f)\Big\}$$

$$<C_k\Big\{1+\log^+\log^+\frac{1}{|f(0)|}+\log^+\frac{1}{r}$$

$$+\log^+\frac{2}{\rho-r}+\log^+\rho+\log^+T(\rho,f)\Big\}. \quad (4.2.16)$$

综合(4.2.14),(4.2.15)与(4.2.16)即有

$$m\left(r,\ \frac{f^{(k+1)}}{f^{(k)}-1}\right)=O(\log(rT(r,f))),$$

至多可能除去一个线性测度为有穷的除外集．于是对 $S(r,f)$ 也有相同的论断．

由 Milloux 不等式与对余项的讨论，立即有

系 1．设 $f(z)$ 为一超越整函数，则下述两种情况不能同时发生

(1) $f(z)-a$ 的零点数目有穷；

(2) $f^{(k)}(z)-b$ 的零点数目有穷．

这里 a 和 b 为两个有穷复数，且 $b\neq 0$．

事实上，如果 (1) 和 (2) 同时发生，命

$$g(z)=\frac{f(z)-a}{b},$$

对 $g(z)$ 应用 Milloux 不等式，并计及以上关于余项的讨论，可以推得

$$\varliminf_{r\to\infty}\frac{T(r,g)}{\log r}<\infty.$$

由引理 1.5 $g(z)$ 应为有理函数，从而 $f(z)$ 也是有理函数．这与假设矛盾．

系 2．设 $f(z)$ 为有穷正级整函数，则下述两种情况不能同时发生

(1) $f(z)$ 有一个有穷的 Borel 例外值；

(2) $f^{(k)}(z)$ 有一个有穷非零的 Borel 例外值．

4.2.3. 熊庆来不等式

现在我们推导熊庆来[3]的一个不等式，它类似于 Milloux 不等式，但是在熊庆来不等式中极点密指量不再出现.

定理 4.4. 设 $f(z)$于开平面亚纯，a, b, c 为三个有穷复数，且 $b \neq 0, c \neq 0, b \neq c$，则

$$T(r,f) < N\left(r, \frac{1}{f-a}\right) + N\left(r, \frac{1}{f^{(k)}-b}\right)$$

$$+ N\left(r, \frac{1}{f^{(k)}-c}\right) - N\left(r, \frac{1}{f^{(k+1)}}\right) + Q(r,f). \quad (4.2.17)$$

这里

$$Q(r,f) = O\{\log(rT(r,f))\}, \quad (4.2.18)$$

当$f(z)$为无穷级时，可能须除去 r 的一个线性测度为有穷的集合.

证. 我们从

$$m\left(r, \frac{1}{f-a}\right) \leqslant m\left(r, \frac{1}{f^{(k)}}\right) + m\left(r, \frac{f^{(k)}}{f-a}\right)$$

出发. 而

$$m\left(r, \frac{1}{f-a}\right) = T(r,f) - N\left(r, \frac{1}{f-a}\right) + O(1),$$

$$m\left(r, \frac{1}{f^{(k)}}\right) = T(r, f^{(k)}) - N\left(r, \frac{1}{f^{(k)}}\right) + O(1),$$

于是

$$T(r,f) < N\left(r, \frac{1}{f-a}\right) + T(r, f^{(k)})$$

$$- N\left(r, \frac{1}{f^{(k)}}\right) + m\left(r, \frac{f^{(k)}}{f-a}\right) + O(1). \quad (4.2.19)$$

对于 $f^{(k)}(z)$ 应用 Nevanlinna 第二基本定理有

$$T(r, f^{(k)}) < N\left(r, \frac{1}{f^{(k)}}\right) + N\left(r, \frac{1}{f^{(k)}-b}\right)$$

$$+ N\left(r, \frac{1}{f^{(k)}-c}\right) - N\left(r, \frac{1}{f^{(k+1)}}\right) + Q_1(r, f^{(k)}). \quad (4.2.20)$$

当 $f(z)$ 为有穷级时，根据定理 4.2 $f^{(k)}(z)$ 也是有穷级，并且 $Q_1(r, f^{(k)}) = O(\log r)$. 当 $f(z)$ 为无穷级时，

$$Q_1(r, f^{(k)}) = O\{\log(rT(r, f^{(k)}))\}$$
$$= O\{\log(rT(r, f))\},$$

可能须除去一个线性测度为有穷的集合.

比较(4.2.19)与(4.2.20)即得定理结论.

§ 4.3. Miranda 定则

在 § 2.2 我们曾经看到，对于域 D 内的一族全纯函数 $\mathscr{F}$，如果 $\mathscr{F}$ 中每个函数都不取两个有穷复数 a, b，则 $\mathscr{F}$ 在 D 内是正规的. 在本节里将考虑 $\mathscr{F}$ 中每个函数不取一个有穷复数 a，而其 k 阶导数不取一个有穷非零复数 b 的情况，建立相应的正规定则.

4.3.1. 界囿定理

为了获得正规定则，我们先证明:

定理 4.5. 设函数 $f(z)$ 在 $|z| < R$ 内全纯，且在此圆内 $f(z) \neq 0$, $f^{(k)}(z) \neq 1$. 若 $f^{(k+1)}(0) \neq 0$，则对于 $0 < r < R$ 有

$$T(r, f) < C_k\left\{\log^+|f(0)| + \log^+|f^{(k)}(0)| + \log^+\frac{1}{|f^{(k+1)}(0)|}\right.$$
$$\left.+ \log^+\frac{1}{R} + \log^+ R + \log^+\frac{2}{R-r}\right\}. \tag{4.3.1}$$

证. 对 $f(z)$ 应用定理 4.3 有

$$T(r, f) < m\left(r, \frac{f^{(k)}}{f}\right) + m\left(r, \frac{f^{(k+1)}}{f}\right) + m\left(r, \frac{f^{(k+1)}}{f^{(k)}-1}\right)$$
$$+ \log\left|\frac{f(0)(f^{(k)}(0)-1)}{f^{(k+1)}(0)}\right| + \log 2.$$

应用引理 4.3

$$m\left(r, \frac{f^{(l)}}{f}\right) < C_l\left\{1 + \log^+\log^+\frac{1}{|f(0)|} + \log^+\frac{1}{r}\right.$$

$$+\log^+\frac{1}{\rho-r}+\log^+\rho+\log^+T(\rho,f)\Big\}\quad(l=k,k+1).$$

关于 $m\left(r,\ \frac{f^{(k+1)}}{f^{(k)}-1}\right)$, 由引理 1.3 有

$$m\left(r,\ \frac{f^{(k+1)}}{f^{(k)}-1}\right)<10+4\log^+\log^+\frac{1}{|f^{(k)}(0)-1|}$$

$$+2\log^+\frac{1}{r}+3\log^+\frac{1}{\rho'-r}+4\log^+\rho'$$

$$+4\log^+T(\rho',f^{(k)}-1).$$

但

$$T(\rho',f^{(k)})\leqslant m\left(\rho',\ \frac{f^{(k)}}{f}\right)+(k+1)T(\rho',f),$$

取 $\rho'=\frac{\rho+r}{2}$, 则

$$4\log^+T(\rho',f^{(k)})<\log^+\log^+\frac{1}{|f(0)|}+\log^+\frac{1}{\rho'}+\log^+\frac{1}{\rho-\rho'}$$

$$+\log^+\rho+5\log^+T(\rho,f)+C_k$$

$$<\log^+\log^+\frac{1}{|f(0)|}+\log^+\frac{1}{r}+\log^+\frac{2}{\rho-r}$$

$$+\log^+\rho+5\log^+T(\rho,f)+C_k.$$

于是

$$T(r,f)<\left\{\log|f(0)|+C_k\log^+\log^+\frac{1}{|f(0)|}\right\}$$

$$+\left\{\log|f^{(k)}(0)-1|+4\log^+\log^+\frac{1}{|f^{(k)}(0)-1|}\right\}$$

$$+\log\frac{1}{|f^{(k+1)}(0)|}+C_k\left\{\log^+\frac{1}{r}\right.$$

$$\left.+\log^+\frac{2}{\rho-r}+\log^+\rho+\log^+T(\rho,f)+1\right\}$$

$$
\begin{aligned}
&< \log^+|f(0)| + \log^+|f^{(k)}(0)| + \log^+\frac{1}{|f^{(k+1)}(0)|} \\
&\quad + C_k\left(\log^+\frac{1}{r} + \log^+R + 1\right) + C_k\log^+\frac{1}{\rho - r} \\
&\quad + C_k\log^+T(\rho, f).
\end{aligned}
$$

当 $r \geqslant \frac{R}{2}$ 时，$\log^+\frac{1}{r} \leqslant \log^+\frac{2}{R}$，应用引理 2.4 消去项 $\log^+T(\rho, f)$，即得定理结论．当 $r < \frac{R}{2}$ 时，由 $T(r, f) \leqslant T\left(\frac{R}{2}, f\right)$ 也可得到定理结论．

4.3.2. Miranda 定则

现在我们应用定理 4.5 来证明下面的重要定理，由此易于导出著名的 Miranda[1] 定则．

定理 4.6. 设在 $|z| < 1$ 内 $f(z)$ 全纯，并且 $f(z) \neq 0$，$f^{(k)}(z) \neq 1$．若在 $|z| \leqslant \frac{1}{32}$ 上存在 z_0 使 $|f(z_0)| < 1$，则在 $|z| \leqslant \frac{1}{32}$ 上一致地有 $|f(z)| < C_k$．

证．我们区分两种情况．

(1) 在 $|z| \leqslant \frac{1}{8}$ 上恒有

$$
\sum_{j=0}^{k} |f^{(j)}(z)| > 1. \tag{4.3.2}
$$

这时再分为两种情况．

(1.1) 在 $|z| \leqslant \frac{1}{32}$ 上恒有 $|f(z)| < 1$，定理结论显然成立．

(1.2) 在 $|z| \leqslant \frac{1}{32}$ 上存在点 z_1 使 $|f(z_1)| \geqslant 1$．根据连续性，在 $\overline{z_0z_1}$ 上存在 z_2 使 $|f(z_2)| = 1$．

由 (4.3.2)，在 $|z - z_2| \leqslant \frac{3}{32}$ 上有

$$\frac{1}{|f|}<\sum_{j=0}^{k}\left|\frac{f^{(j)}}{f}\right|.$$

于是当 $0<r<\rho<\frac{3}{32}$ 时有

$$\begin{aligned}m\left(r, z_2, \frac{1}{f}\right)&<\sum_{j=0}^{k} m\left(r, z_2, \frac{f^{(j)}}{f}\right)+\log(k+1)\\&<C_k\left\{1+\log^+\frac{1}{r}+\log^+\frac{1}{\rho-r}\right.\\&\quad\left.+\log^+\rho+\log^+T(\rho, z_2, f)\right\}.\end{aligned}\tag{4.3.3}$$

由 $|f(z_2)|=1$, $f(z)\neq 0(|z|<1)$与(4.3.3)得

$$\begin{aligned}T(r, z_2, f)&=T\left(r, z_2, \frac{1}{f}\right)=m\left(r, z_2, \frac{1}{f}\right)\\&<C_k\left\{1+\log^+\frac{1}{r}+\log^+\frac{1}{\rho-r}+\log^+\rho\right.\\&\quad\left.+\log^+T(\rho, z_2, f)\right\}.\end{aligned}$$

应用引理2.4消去 $\log^+T(\rho, z_2, f)$，不难得到

$$T(r, z_2, f)<C_k\left\{1+\log^+\frac{1}{\frac{3}{32}-r}\right\}.$$

故

$$\log M\left(\frac{1}{16}, z_2, f\right)<\frac{\frac{5}{64}+\frac{1}{16}}{\frac{5}{64}-\frac{1}{16}}T\left(\frac{5}{64}, z_2, f\right)<C_k.$$

注意到 $|z|\leqslant\frac{1}{32}$ 含于 $|z-z_2|\leqslant\frac{1}{16}$ 内，即得

$$\log M\left(\frac{1}{32}, f\right)<C_k.$$

(2) 在$|z|\leqslant\frac{1}{8}$上存在z_3使$\sum_{j=0}^{k}|f^{(j)}(z_3)|\leqslant 1$.

在$|z|=\frac{1}{4}$上取点ζ使$|f(\zeta)|=\max_{|z|=\frac{1}{4}}|f(z)|$. 用直线段连结$z_3$与$\zeta$. 这时又区分为两种情况.

(2.1) 在$\overline{z_3\zeta}$上恒有$|f^{(k+1)}(z)|<1$.

在此情况，对于$\overline{z_3\zeta}$上的任意点z有

$$
\begin{aligned}
|f^{(k)}(z)| &\leqslant |f^{(k)}(z_3)|+\int_{\overline{z_3 z}}|f^{(k+1)}(t)||dt| \\
&< |f^{(k)}(z_3)|+1,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
|f^{(k-1)}(z)| &\leqslant |f^{(k-1)}(z_3)|+\int_{\overline{z_3 z}}|f^{(k)}(t)||dt| \\
&< |f^{(k-1)}(z_3)|+|f^{(k)}(z_3)|+1,
\end{aligned}
$$

$$\cdots\cdots$$

$$|f'(z)|\leqslant|f'(z_3)|+\int_{\overline{z_3 z}}|f''(t)||dt|<\sum_{j=1}^{k}|f^{(j)}(z_3)|+1,$$

$$|f(\zeta)|<\sum_{j=0}^{k}|f^{(j)}(z_3)|+1\leqslant 2.$$

于是

$$M\left(\frac{1}{32},\ f\right)\leqslant M\left(\frac{1}{4},\ f\right)<2.$$

(2.2) 在$\overline{z_3\zeta}$上使$|f^{(k+1)}(z)|\geqslant 1$的第一个点为$z_4$. 则

$$|z_4|\leqslant\frac{1}{4},\quad |\zeta-z_4|\leqslant\frac{3}{8} \tag{4.3.4}$$

以及

$$|f^{(k+1)}(z_4)|\geqslant 1,$$

而在$\overline{z_3z_4}$上有$|f^{(k+1)}(z)|<1$. (z_4可能与z_3重合)如同(2.1)的情况有

$$|f(z_4)|<2,\qquad |f^{(k)}(z_4)|<2.$$

在 $|z-z_4|<\frac{3}{4}$ 内，$f(z)$全纯，且 $f(z)\neq 0$ 以及 $f^{(k)}(z)\neq 1$. 应用定理 4.5，对于 $0<r<\frac{3}{4}$ 有

$$T(r, z_4, f)<C_k\left\{\log^+|f(z_4)|+\log^+|f^{(k)}(z_4)|\right.$$

$$\left.+\log^+\frac{1}{|f^{(k+1)}(z_4)|}+\log\frac{2}{\frac{3}{4}-r}\right\}.$$

因此由(4.3.4)有

$$\log M\left(\frac{1}{4}, f\right)=\log|f(\zeta)|$$

$$\leqslant\frac{\frac{5}{8}+\frac{3}{8}}{\frac{5}{8}-\frac{3}{8}}T\left(\frac{5}{8}, z_4, f\right)<C_k.$$

定理 4.7. 设$\mathscr{F}$为域D的一个全纯函数族. 若在D内，$\mathscr{F}$中每个函数$f(z)$不取 0，其 k 阶导数 $f^{(k)}(z)$不取 1，则$\mathscr{F}$在D内是正规的.

证. 我们仅须证明$\mathscr{F}$在D内每点都是正规的. 任取 $z_0\in D$，则存在相应的正数 δ_0 使得$|z-z_0|<\delta_0$ 含于D内.

对于$\mathscr{F}$中每个函数$f(z)$，令

$$f_1(t)=\frac{f(z_0+\delta_0 t)}{\delta_0^k}.$$

$f_1(t)$ 在 $|t|<1$ 内全纯，且 $f_1(t)\neq 0$，$f_1^{(k)}(t)\neq 1$. 如果在 $|z-z_0|\leqslant\frac{\delta_0}{32}$ 上存在 z_1 使 $|f(z_1)|<\delta_0^k$，则在$|t|\leqslant\frac{1}{32}$ 上相应地有 t_1，$|t_1|\leqslant\frac{1}{32}$，使$|f_1(t_1)|<1$. 应用定理 4.6，在$|t|\leqslant\frac{1}{32}$上一致地有$|f_1(t)|<C_k$. 即在$|z-z_0|\leqslant\frac{\delta_0}{32}$上一致地有 $|f(z)|<C_k\delta_0^k$.

于是对$\mathscr{F}$中每个函数$f(z)$，在$|z-z_0|\leqslant\frac{\delta_0}{32}$上或者一致地有$|f(z)|<C_k\delta_0^{\frac{1}{5}}$，或者一致地有$|f(z)|\geqslant\delta_0^{\frac{1}{5}}$. 从而对于$\mathscr{F}$中的任意函数序列$(f_n(z))$，在$|z-z_0|\leqslant\frac{\delta_0}{32}$上或者$(f_n(z))$一致有界，或者存在子序列$(f_{n_k}(z))$，其倒数一致有界. 于是$\mathscr{F}$在$|z-z_0|\leqslant\frac{\delta_0}{32}$内正规.

系. 设$\mathscr{F}$为域D内的一个全纯函数族. 若在D内，$\mathscr{F}$中每个函数$f(z)$不取一个有穷复数a，其k阶导数$f^{(k)}(z)$不取一个有穷非零复数b，则$\mathscr{F}$在D内正规.

定理 4.7 的正确性首先由 P. Montel 提出，F. Bureau 给出了部分的证明. 1935 年，C. Miranda[1]给出了完善的证明，所以通常称为 Miranda 定则. Miranda 原来的证明相当复杂，这里的证明则比较简单.

§ 4.4. 结合于导数的辐角分布

4.4.1. 基本定理.

如同 G. Valiron 的基本定理（定理 3.3），以下将建立一个结合于导数的基本定理.（参阅张广厚[1]）.

引理 4.4. 设函数$f(z)$在$|z|\leqslant R(<\infty)$内亚纯. 若$f(0)\neq 0,\infty$，$f^{(k)}(0)\neq 1$，$f^{(k+1)}(0)\neq 0$，则对于$0<r<R$有

$$\begin{aligned}T(r,f)<C_k\Big\{&\overline{N}(R,f=\infty)+N(R,f=0)\\&+N(R,f^{(k)}=1)+\log^+|f(0)|+\log^+|f^{(k)}(0)|\\&+\log^+\frac{1}{|f^{(k+1)}(0)|}+\log^+\frac{1}{R}+\log^+R\\&+\log^+\frac{2}{R-r}\Big\}.\end{aligned}\tag{4.4.1}$$

由定理 4.3 出发，类似于定理 4.5 的推导即可证明这个引理.

定理 4.8. 设函数 $f(z)$ 在 $|z|<1$ 内亚纯. 若

$$n(1, f=0)+n(1, f=\infty)+n(1, f^{(k)}=1)<N, \tag{4.4.2}$$

则对于任意复数 a 有

$$n\left(\frac{1}{32}, f=a\right)<C_k\left\{N+\log \frac{1}{|f(z^*), a|}\right.$$
$$\left.+\log^+\log^+|f(z^*)|\right\}. \tag{4.4.3}$$

这里 $|f(z^*),a|$ 表示 $f(z^*)$ 与 a 的球面距离, z^* 是 $|z|<\frac{1}{32}$ 内的一点, 且

$$\prod_{q=1}^{n(1, f=\infty)}|z^*-\beta_q|>\left(\frac{1}{400e}\right)^{n(1, f=\infty)},$$

其中 $\beta_q(q=1,2,\cdots,n(1,f=\infty))$ 是 $f(z)$ 在 $|z|<1$ 内的极点.

证. 在 $|z|<1$ 内以 $\alpha_p(p=1,2,\cdots,n(1,f=0))$ 表示 $f(z)$ 的零点, $\beta_q(q=1,2,\cdots,n(1,f=\infty))$ 表示 $f(z)$ 的极点, $\tau_s(s=1,2,\cdots,n(1,f^{(k)}=1))$ 表示 $f^{(k)}(z)-1$ 的零点.

根据 Boutroux-Cartan 引理, 对于任意点 z, 三个乘积

$$\prod_{p=1}^{n(1,f=0)}|z-\alpha_p|, \quad \prod_{q=1}^{n(1,f=\infty)}|z-\beta_q|,$$
$$\prod_{s=1}^{n(1,f^{(k)}=1)}|z-\tau_s|$$

都大于 $\left(\frac{1}{400e}\right)^N$, 至多除去有限个小圆, 其半径总和不超过 $\frac{3}{200}$. 将这些小圆的总和记为 (γ).

区分两种情况.

(1) 在 $|z|\leqslant\frac{1}{8}$ 上且在 (γ) 外恒有

$$\sum_{j=0}^{k}|f^{(j)}(z)|>1. \tag{4.4.4}$$

由于(γ)中诸圆直径总和不超过$\frac{3}{100}$，于是存在点 z_0，$|z_0| \leqslant \frac{1}{32}$，且 $z_0 \bar{\in} (\gamma)$。在$|z - z_0| \leqslant \frac{3}{32}$上由(4.4.4)有

$$\sum_{j=0}^{k} \left| \frac{f^{(j)}(z)}{f(z)} \right| > \frac{1}{|f(z)|}.$$

因此对于 $0 < r < \rho < \frac{3}{32}$ 得

$$m\left(r, z_0, \frac{1}{f}\right) < \sum_{j=0}^{k} m\left(r, z_0, \frac{f^{(j)}}{f}\right) + \log(k+1)$$

$$< C_k \left\{1 + \log^+ \frac{1}{r} + \log^+ \frac{1}{\rho - r}\right.$$

$$\left. + \log^+ \log^+ \frac{1}{|f(z_0)|} + \log^+ T(\rho, z_0, f)\right\}.$$

再结合到

$$N\left(r, z_0, \frac{1}{f}\right) = \log \frac{r^{n(r, z_0, 1/f)}}{\prod\limits_{|a_p - z_0| \leqslant r} |z_0 - a_p|}$$

$$= \log \frac{r^{n(r, z_0, 1/f)} \prod\limits_{|a_p - z_0| > r} |z_0 - a_p|}{\prod\limits_{p=1}^{n(1, f=0)} |z_0 - a_p|} < N \log(800e), \quad (4.4.5)$$

便有

$$T\left(r, z_0, \frac{1}{f}\right) < C_k \left\{N + \log^+ \frac{1}{r} + \log^+ \frac{1}{\rho - r}\right.$$

$$\left. + \log^+ T(\rho, z_0, f) + \log^+ \log^+ \frac{1}{|f(z_0)|}\right\}$$

$$< C_k \left\{N + \log^+ \frac{1}{r} + \log^+ \frac{1}{\rho - r}\right.$$

$$+ \log^+ T\left(\rho, z_0, \frac{1}{f}\right) + \log^+\log^+|f(z_0)|$$

$$+ \log^+\log^+\frac{1}{|f(z_0)|}\Bigg\}.$$

$$\left(0 < r < \rho < \frac{3}{32}\right)$$

应用引理 2.4 消去 $\log^+T\left(\rho, z_0, \frac{1}{f}\right)$即有

$$T\left(r, z_0, \frac{1}{f}\right) < C_k\log^+\log^+\frac{1}{|f(z_0)|}$$

$$+ C_k\left\{N + \log^+\frac{1}{r} + \log^+\frac{2}{\frac{3}{32} - r} + \log^+\log^+|f(z_0)|\right\}.$$

于是

$$T(r, z_0, f) < \log^+|f(z_0)|$$

$$+ C_k\left\{N + \log^+\frac{1}{r} + \log^+\frac{2}{\frac{3}{32} - r} + \log^+\log^+|f(z_0)|\right\}.$$

从而

$$n\left(\frac{1}{16}, z_0, f = a\right) \leqslant \frac{1}{\log\dfrac{\frac{5}{64}}{\frac{1}{16}}}\int_{1/16}^{5/64}\frac{n(t, z_0, f = a)}{t}\,dt$$

$$\leqslant \frac{1}{\log\frac{5}{4}} N\left(\frac{5}{64}, z_0, \frac{1}{f - a}\right)$$

$$< \frac{1}{\log\frac{5}{4}}\left\{T\left(\frac{5}{64}, z_0, f\right) + \log^+|a|\right.$$

$$\left. + \log 2 + \log\frac{1}{|f(z_0) - a|}\right\}$$

$$< \frac{1}{\log \frac{5}{4}} \left\{ \log^+ |f(z_0)| + \log^+ |a| + \log \frac{1}{|f(z_0) - a|} \right.$$

$$\left. + C_k(N + \log^+ \log^+ |f(z_0)|) \right\}.$$

注意$|z| \leqslant \frac{1}{32}$含于 $|z - z_0| \leqslant \frac{1}{16}$内，以及对于任意两个复数 x, y 有

$$\log^+ |x| + \log^+ |y| + \log \frac{1}{|x - y|} \leqslant \log \frac{1}{|x, y|}.$$

因此

$$n\left(\frac{1}{32}, f = a\right) < C_k \left\{ N + \log \frac{1}{|f(z_0), a|} + \log^+ \log^+ |f(z_0)| \right\}.$$

(2) 存在点 z_1, $|z_1| \leqslant \frac{1}{8}$, $z_1 \bar{\in} (\gamma)$ 使 $\sum_{j=0}^{k} |f^{(j)}(z_1)| \leqslant 1$.

在圆环 $\frac{1}{2} < |z - z_1| < \frac{3}{4}$ 内存在圆周 $|z - z_1| = \rho$ 与 (γ) 无交．命

$$|f(\zeta)| = \max_{|z - z_1| = \rho} |f(z)|.$$

用直线段连结 z_1 与 ζ，遇(γ)中的小圆，则以相应的弧段替代相交部分，这样得曲线段 L. 可以看出 L 的长度小于 1.

(2.1) 在 L 上恒有 $|f^{(k+1)}(z)| < 1$.

这时对于 L 上任意点 z 有

$$|f^{(k)}(z)| < |f^{(k)}(z_1)| + 1,$$

$$|f^{(k-1)}(z)| < \sum_{j=k-1}^{k} |f^{(j)}(z_1)| + 1,$$

$$\cdots\cdots$$

$$|f(\zeta)| < \sum_{j=0}^{k} |f^{(j)}(z_1)| + 1 < 2.$$

从而

$$m(\rho, z_1, f) < \log 2.$$

如同(4.4.5)

$$N(\rho, z_1, f) = \log \frac{r^{n(\rho, z_1, f)}}{\prod\limits_{|z_1-\beta_q|\le\rho} |z_1 - \beta_q|}$$

$$= \log \frac{r^{n(\rho, z_1, f)} \prod\limits_{|z_1-\beta_q|>\rho} |z_1 - \beta_q|}{\prod\limits_{q=1}^{n(1, f=\infty)} |z_1 - \beta_q|} < N \log (800e).$$

于是

$$T(\rho, z_1, f) < CN.$$

因而对于任意复数 a 有

$$n\left(\frac{1}{4}, z_1, \frac{1}{f-a}\right) \le \frac{1}{\log \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}}} N\left(\frac{1}{2}, z_1, \frac{1}{f-a}\right)$$

$$< \frac{1}{\log 2}\left\{T(\rho, z_1, f) + \log^+|a| + \log 2 + \log \frac{1}{|f(z_1) - a|}\right\}$$

$$< C\left(N + \log \frac{1}{|f(z_1), a|}\right).$$

但 $|z| \le \frac{1}{8}$ 含于 $|z - z_1| \le \frac{1}{4}$ 内，故

$$n\left(\frac{1}{8}, \frac{1}{f-a}\right) < C\left(N + \log \frac{1}{|f(z_1), a|}\right).$$

(2.2) 在 L 上从点 z_1 向 ζ 移动时使 $|f^{(k+1)}(z)| \ge 1$ 的第一个点为 z_2. 当 $|f^{(k+1)}(z_1)| \ge 1$ 时则取 $z_2 = z_1$. 于是

$$|f^{(k+1)}(z_2)| \ge 1. \tag{4.4.6}$$

而在 L 上由 z_1 至 z_2 的部分有 $|f^{(k+1)}(z)| < 1$. 如同情况(2.1)可得

$$|f(z_2)| < 2, |f^{(k)}(z_2)| < 2. \tag{4.4.7}$$

记 $d=|\zeta-z_2|$. 由于 $|\zeta|<\frac{1}{8}+\frac{3}{4}=\frac{7}{8}$, 圆 $|z-z_2|<d+\frac{1}{16}$ 含于 $|z|<1$ 内. $f(z)$ 在 $|z-z_2|<d+\frac{1}{16}$ 内亚纯，且

$$n\left(d+\frac{1}{16}, z_2, f=0\right)+n\left(d+\frac{1}{16}, z_2, f=\infty\right)$$
$$+n\left(d+\frac{1}{16}, z_2, f^{(k)}=1\right)<N. \tag{4.4.8}$$

应用引理 4.4，由(4.4.6)，(4.4.7)，(4.4.8)与 $z_2\bar{\in}(\gamma)$，当 $0<r<d+\frac{1}{16}$ 时有

$$T(r, z_2, f)<C_k\left\{N+\log\frac{2}{d+\frac{1}{16}-r}\right\}.$$

在圆 $|z-z_2|\leqslant d+\frac{1}{32}$ 上应用 Poisson-Jensen 公式，并注意 $z_2\bar{\in}(\gamma)$ 有

$$\log|f(\zeta)|\leqslant\frac{\left(d+\frac{1}{32}\right)+d}{\left(d+\frac{1}{32}\right)-d}T\left(d+\frac{1}{32}, z_2, f\right)$$
$$+\sum_{|\beta_q-z_2|<d+1/32}\log\frac{d+\frac{1}{32}}{|\beta_q-z_2|}<C_kN.$$

从而

$$m(\rho, z_1, f)<C_kN.$$

如同情况(2.1)也可得到

$$n\left(\frac{1}{8}, \frac{1}{f-a}\right)<C_k\left(N+\log\frac{1}{|f(z_1), a|}\right).$$

4.4.2. 应用

现在我们将定理 4.8 致用于讨论亚纯函数的辐角分布问题.

定理 4.9. 设 $f(z)$为一整函数，级 λ 为有穷正数，则必存在从原点出发的一条半直线 B: $\arg z=\theta_0(0\leqslant\theta_0<2\pi)$，具有下述性质：若 k 为任意正整数，α，β 为两个任意的有穷复数且 β 不为零，则对于任意正数 ε 有

$$\varlimsup_{r\to\infty}\frac{\log\{n(r,\theta_0,\varepsilon,f=\alpha)+n(r,\theta_0,\varepsilon,f^{(k)}=\beta)\}}{\log r}=\lambda. \tag{4.4.9}$$

这里如同 3.3.3 节中的记号，$n(r,\theta_0,\varepsilon,f=\alpha)$表示区域$(|z|\leqslant r)\cap(|\arg z-\theta_0|\leqslant\varepsilon)$上 $f(z)-\alpha$ 的零点数，$n(r,\theta_0,\varepsilon,f^{(k)}=\beta)$则表示该区域上 $f^{(k)}(z)-\beta$ 的零点数. 在这些零点数中，重级零点都要按其重数计算.

证. 根据定理 3.8，$f(z)$至少具有一条 Borel 方向

$$B:\ \arg z=\theta_0\quad(0\leqslant\theta_0<2\pi),$$

我们将证明 B 就具有定理所要求的性质.

设若不然，即存在一个正整数 k_0，两个有穷复数 α_0，$\beta_0(\beta_0\neq0)$以及一个正数 ε_0 使得当 r 适当大时有

$$n(r,\theta_0,\varepsilon_0,f=\alpha_0)+n(r,\theta_0,\varepsilon_0,f^{(k)}=\beta_0)<r^{\tau}\quad(\tau<\lambda).$$

考虑

$$g(z)=\frac{f(z)-\alpha_0}{\beta_0},$$

它仍为 λ 级整函数. 可以看出 $g(z)$与 $f(z)$有相同的 Borel 方向，因而 $g(z)$ 以 B 为其 Borel 方向. 根据定理 3.11，存在一列圆

$$\Gamma_j:|z-z_j|<\varepsilon_j|z_j|,\ \lim_{j\to\infty}|z_j|=\infty,$$

$$\lim_{j\to\infty}\varepsilon_j=0,\quad \arg z_j=\theta_0\quad(j=1,2,\cdots)$$

为 $g(z)$ 的 λ 级充满圆. 即在每个 Γ_j 内 $g(z)$ 取任意复数至少 $|z_j|^{\lambda-\eta_j}$ 次，可能除去一些复数含于半径为 δ_j 的两个球面小圆 s_j，s_j' 内，其中 $\lim\limits_{j\to\infty}\eta_j=\lim\limits_{j\to\infty}\delta_j=0$.

取

$$\Gamma_j':|z-z_j|<32\varepsilon_j|z_j|,\qquad(j=1,2,\cdots).$$

当 j 充分大时 Γ_j' 含于角域 $|\arg z-\theta_0|<\varepsilon_0$ 内。

当 j 充分大时，对每个固定的 j 置

$$h_j(t)=\frac{g(z_j+32\varepsilon_j|z_j|t)}{(32\varepsilon_j|z_j|)^k}.$$

它在 $|t|\leqslant 1$ 上全纯，并且

$$\begin{aligned}
&n(1,h_j=0)+n(1,h_j^{(k)}=1)\\
&=n(\Gamma_j',g=0)+n(\Gamma_j',g^{(k)}=1)\\
&\leqslant n(|z_j|+32\varepsilon_j|z_j|,\theta_0,\varepsilon_0,f=\alpha_0)\\
&\quad+n(|z_j|+32\varepsilon_j|z_j|,\theta_0,\varepsilon_0,f^{(k)}=\beta_0)\\
&<2|z_j|^\tau.
\end{aligned}$$

应用定理 4.8，对于任意复数 a 有

$$\begin{aligned}
&n\left(\frac{1}{32},h_j=\frac{a}{(32\varepsilon_j|z_j|)^k}\right)\\
&\qquad<C_k\left\{|z_j|^\tau+\log\frac{1}{\left|h_j(t_j^*),\dfrac{a}{(32\varepsilon_j|z_j|)^k}\right|}\right.\\
&\qquad\qquad\left.+\log^+\log^+|h_j(t_j^*)|\right\}.
\end{aligned}\tag{4.4.10}$$

即

$$\begin{aligned}
n(\Gamma_j,g=a)<C_k\Bigg\{|z_j|^\tau+\log\frac{1}{\left|\dfrac{g(z_j^*)}{(32\varepsilon_j|z_j|)^k},\dfrac{a}{(32\varepsilon_j|z_j|)^k}\right|}\\
+\log^+\log^+\left|\frac{g(z_j^*)}{(32\varepsilon_j|z_j|)^k}\right|\Bigg\}.
\end{aligned}$$

可以假定 $\varepsilon_j|z_j|\geqslant 1$. 因为当 Γ_j 的半径不满足这个条件时，只须代替 Γ_j 而考虑 Γ_j^*: $|z-z_j|<\varepsilon_j^*|z_j|=1$. 显然半径放大后的圆仍构成 λ 级充满圆. 因此

$$\log\frac{1}{\left|\dfrac{g(z_j^*)}{(32\varepsilon_j|z_j|)^k},\dfrac{a}{(32\varepsilon_j|z_j|)^k}\right|}\leqslant\log\frac{(32\varepsilon_j|z_j|)^k}{|g(z_j^*),a|}.$$

由于 $g(z)$ 的级为 λ，且 $z_j^*\in\Gamma_j$，故

$$\log^+\log^+|g(z_j^*)| < (\lambda+1)\log|z_j|. \qquad (4.4.11)$$

于是

$$n(\Gamma_j, g=a) < C_k\Big\{|z_j|^\tau + (\lambda+k+1)\log|z_j|$$

$$+\log\frac{1}{|g(z_j^*), a|}\Big\}.$$

从而除去一个球面半径为 $e^{-|z_j|^{\frac{\tau}{2}}}$ 的小圆 s_j'' 后，对于其他复数 a 恒有

$$n(\Gamma_j, g=a) < |z_j|^{\tau_1}, \qquad (\tau < \tau_1 < \lambda).$$

当 j 趋于∞时，s_j，s_j' 和 s_j'' 的球面半径都趋向于 0. 当 j 充分大时可以取复数 a_j 不属于 $s_j\cup s_j'\cup s_j''$. 因此

$$|z_j|^{\lambda-\eta_j} < n(\Gamma_j, g=a) < |z_j|^{\tau_1}.$$

令 $j\to\infty$，得 $\lambda\leqslant\tau_1$，推得一个矛盾. 定理便得证.

对于亚纯函数，我们有以下结果.

定理 4.10. 设 $f(z)$ 为于开平面亚纯的函数，级 λ 为有穷正数，则必存在从原点出发的一条半直线 $B: \arg z=\theta_0(0\leqslant\theta_0<2\pi)$具有下述性质：若 k 为任意正整数，α，β 为两个任意的有穷复数且 β 不为零，则对于任意正数 ε 有

$$\varlimsup_{r\to\infty}\frac{\log\{n(r,\theta_0,\varepsilon,f=\infty)+n(r,\theta_0,\varepsilon,f=\alpha)+n(r,\theta_0,\varepsilon,f^{(k)}=\beta)\}}{\log r}$$

$$=\lambda. \qquad (4.4.12)$$

定理 4.10 的证明可类似于定理 4.9 完成. 但是这时 (4.4.11) 不再是显然的事实，而必须作如下演算.

对 $h_j(t)$ 应用定理 4.8 时有

$$\prod_{q=1}^{n(1,h_j=\infty)}|t_j^*-b_{jq}| > \left(\frac{1}{400e}\right)^{n(1,h_j=\infty)},$$

其中 $b_{jq}(q=1,2,\cdots,n(1,h_j=\infty))$是$|t|<1$上 $h_j(t)$的极点. 而由 Poisson-Jensen 公式有

$$\log|g(z_j^*)|$$

$$\leqslant \frac{3|z_j| + 2|z_j|}{3|z_j| - 2|z_j|} m(3|z_j|, g)$$

$$+ \sum_{|b'_{jq}|\leqslant 3|z_j|} \log \left| \frac{(3|z_j|)^2 - b'_{jq} z_j^*}{3|z_j|(z_j^* - b'_{jq})} \right|$$

$$\leqslant 5m(3|z_j|, g) + \sum_{|b'_{jq}|\leqslant 3|z_j|} \log \frac{6|z_j|}{|z_j^* - b'_{jq}|}$$

$$\leqslant 5m(3|z_j|, g) + n(3|z_j|, g=\infty)\log 6|z_j|$$

$$+ \sum_{|b'_{jq}|\leqslant 3|z_j|} \log \frac{1}{|z_j^* - b'_{jq}|}.$$

这里 b'_{jq} 为 $g(z)$在$|z|\leqslant 3|z_j|$内的极点.

当$|z_j^* - b'_{jq}| \geqslant 32\varepsilon_j|z_j|$时，相应的 $\log \frac{1}{|z_j^* - b'_{jq}|}$ 为负值.

于是

$$\sum_{|b'_{jq}|\leqslant 3|z_j|} \log \frac{1}{|z_j^* - b'_{jq}|} \leqslant \sum_{|z_j^* - b'_{jq}|<32\varepsilon_j|z_j|} \log \frac{1}{|z_j^* - b'_{jq}|}$$

$$= \sum_{|t_j^* - b_{jq}|<1} \log \frac{1}{|z_j + 32\varepsilon_j|z_j|t_j^* - (z_j + 32\varepsilon_j|z_j|b_{jq})|}$$

$$< n(1, h_j = \infty)\log(400e)$$

$$= n(\Gamma_j, g = \infty)\log(400e).$$

而 $g(z)$ 是级为 λ 的整函数，于是

$$\log\log|g(z_j^*)| < (\lambda + 1)\log|z_j|.$$

这样证明便能像定理 4.9 那样完成.

§ 4.5. Hayman 不等式及相应的正规定则

4.5.1. Hayman 不等式

在 R. Nevanlinna 的第二基本定理(定理 1.3)中，必须用三个值点的密指量(即三个 N)才能界囿特征函数 $T(r, f)$. 在 § 4.2 中

我们曾看到这三个密指量中可以有一个或两个用其导数的密指量来代替. 1959年 W. K. Hayman[1] 获得了一个十分有趣的结果,他证明了对于亚纯函数 $f(z)$,只要 $f(z)$ 的一个密指量和 $f^{(k)}(z)$的一个密指量,总共两个密指量便可界囿 $T(r,f)$. 而这在没有引入导数时显然是不可能的.

为了推导 Hayman 的定理,我们先建立

引理 4.5. 设 $f(z)$ 为于 $|z|<R(\leqslant\infty)$内亚纯的函数,不蜕化为多项式. 若 k 为一正整数,且

$$g(z)=\frac{(f^{(k+1)}(z))^{k+1}}{(1-f^{(k)}(z))^{k+2}},\tag{4.5.1}$$

则对于 $0<r<R$ 有

$$\begin{aligned}kN_{1)}(r,f)\leqslant \bar{N}_{(2}(r,f)+\bar{N}\left(r,\frac{1}{f^{(k)}-1}\right)\\+N_0\left(r,\frac{1}{f^{(k+1)}}\right)+m\left(r,\frac{g'}{g}\right)+\log\left|\frac{g(0)}{g'(0)}\right|\end{aligned}\tag{4.5.2}$$

这里 $N_{1)}(r,f)$ 表示 $f(z)$ 的单极点密指量,$\bar{N}_{(2}(r,f)$ 表示 $f(z)$ 的重级极点的精简密指量,$N_0\left(r,\frac{1}{f^{(k+1)}}\right)$ 表示 $|z|\leqslant r$ 内 $f^{(k+1)}(z)$ 的零点但不是 $f^{(k)}(z)-1$ 的零点的密指量.

证. 若 z_0 是 $f(z)$ 的一个单级极点,则

$$f(z)=\frac{a}{z-z_0}+O(1),\tag{4.5.3}$$

其中 $a\neq 0$. 于是两边取其 k 阶导数后有

$$\begin{aligned}1-f^{(k)}(z)&=\frac{(-1)^{k+1}ak!}{(z-z_0)^{k+1}}+O(1)\\&=\frac{(-1)^{k+1}ak!}{(z-z_0)^{k+1}}\{1+O((z-z_0)^{k+1})\}.\end{aligned}$$

同样,在(4.5.3)式两边取其 $k+1$ 阶导数后有

$$f^{(k+1)}(z)=\frac{(-1)^{k+1}a(k+1)!}{(z-z_0)^{k+2}}\{1+O((z-z_0)^{k+2})\}.$$

因此在 z_0 的邻域内有

$$g(z)=\frac{(-1)^{k+1}(k+1)^{k+1}}{ak!}\{1+O((z-z_0)^{k+1})\}.$$

从而 $g(z_0)\neq 0,\infty$，并且 $g'(z)$ 以 z_0 为其零点，重级不低于 k.

对函数 $\dfrac{g'(z)}{g(z)}$ 应用 Jensen 公式，则

$$\begin{aligned}&N\left(r,\frac{g}{g'}\right)-N\left(r,\frac{g'}{g}\right)\\&\qquad=m\left(r,\frac{g'}{g}\right)-m\left(r,\frac{g}{g'}\right)-\log\left|\frac{g'(0)}{g(0)}\right|.\qquad(4.5.4)\end{aligned}$$

而由引理 1.2，上式左端为

$$\begin{aligned}&N(r,g)-N(r,g')+N\left(r,\frac{1}{g'}\right)-N\left(r,\frac{1}{g}\right)\\&\qquad=N\left(r,\frac{1}{g'}\right)-\overline{N}(r,g)-N\left(r,\frac{1}{g}\right)\\&\qquad=N_0\left(r,\frac{1}{g'}\right)-\overline{N}(r,g)-\overline{N}\left(r,\frac{1}{g}\right).\qquad(4.5.5)\end{aligned}$$

这里 $N_0\left(r,\dfrac{1}{g'}\right)$ 表示 $|z|\leqslant r$ 上 $g'(z)$ 的零点而不是 $g(z)$ 的零点的密指量.

比较(4.5.4)，(4.5.5)两式有

$$\begin{aligned}N_0\left(r,\frac{1}{g'}\right)&\leqslant\overline{N}(r,g)+\overline{N}\left(r,\frac{1}{g}\right)\\&\quad+m\left(r,\frac{g'}{g}\right)+\log\left|\frac{g(0)}{g'(0)}\right|.\qquad(4.5.6)\end{aligned}$$

从 $g(z)$ 的表达式可以看出，$g(z)$ 的零点和极点仅能在 $f(z)$ 的重极点，$f^{(k+1)}(z)$ 的零点和 $f^{(k)}(z)-1$ 的零点处出现. 即

$$\begin{aligned}&\overline{N}(r,g)+\overline{N}\left(r,\frac{1}{g}\right)\\&\qquad\leqslant\overline{N}_{(2}(r,f)+\overline{N}\left(r,\frac{1}{f^{(k)}-1}\right)+N_0\left(r,\frac{1}{f^{(k+1)}}\right).\quad(4.5.7)\end{aligned}$$

但是 $f(z)$ 的单级极点必为 $g'(z)$ 重级至少为 k 的零点，且不为 $g(z)$的零点. 即

$$kN_{1)}(r,f) \leqslant N_0\left(r, \frac{1}{g'}\right). \tag{4.5.8}$$

综合(4.5.6),(4.5.7),(4.5.8),便证明了引理结论.

定理 4.11. 设 $f(z)$ 为于 $|z|<R(\leqslant\infty)$ 内亚纯的函数，不蜕化为多项式. 若 k 为一正整数，且

$$f(0)\neq 0,\ \infty;\ f^{(k)}(0)\neq 1;\ f^{(k+1)}(0)\neq 0$$

以及

$$(k+1)f^{(k+2)}(0)(f^{(k)}(0)-1)-(k+2)f^{(k+1)}(0)^2\neq 0,$$

则对于 $0<r<R$ 有

$$T(r,f)<\left(2+\frac{1}{k}\right)N\left(r,\frac{1}{f}\right)$$
$$+\left(2+\frac{2}{k}\right)\bar{N}\left(r,\frac{1}{f^{(k)}-1}\right)+S^*(r,f). \tag{4.5.9}$$

这里

$$S^*(r,f)=\left(2+\frac{2}{k}\right)m\left(r,\frac{f^{(k+1)}}{f^{(k)}-1}\right)$$
$$+\left(2+\frac{1}{k}\right)\left(m\left(r,\frac{f^{(k+1)}}{f}\right)+m\left(r,\frac{f^{(k)}}{f}\right)\right)$$
$$+\frac{1}{k}m\left(r,\frac{f^{(k+2)}}{f^{(k+1)}}\right)+4+\left(2+\frac{1}{k}\right)\log\left|\frac{f(0)(f^{(k)}(0)-1)}{f^{(k+1)}(0)}\right|$$
$$+\frac{1}{k}\log\left|\frac{f^{(k+1)}(0)(f^{(k)}(0)-1)}{(k+1)f^{(k+2)}(0)(f^{(k)}(0)-1)-(k+2)f^{(k+1)}(0)^2}\right|. \tag{4.5.10}$$

证. $f(z)$的每个重级极点在 $N(r,f)$ 中至少计算两次，而在 $\bar{N}(r,f)$ 中仅计算一次，故

$$\bar{N}_{(2}(r,f)\leqslant N(r,f)-\bar{N}(r,f)$$
$$\leqslant T(r,f)-\bar{N}(r,f)$$

$$\leqslant N\left(r,\frac{1}{f}\right)+\bar{N}\left(r,\frac{1}{f^{(k)}-1}\right)$$

$$-N_0\left(r,\frac{1}{f^{(k+1)}}\right)+S(r,f),$$

其中

$$S(r,f)=m\left(r,\frac{f^{(k)}}{f}\right)+m\left(r,\frac{f^{(k+1)}}{f}\right)+m\left(r,\frac{f^{(k+1)}}{f^{(k)}-1}\right)$$

$$+\log\left|\frac{f(0)(f^{(k)}(0)-1)}{f^{(k+1)}(0)}\right|+\log 2.$$

应用引理 4.5,

$$\bar{N}(r,f)=N_{1)}(r,f)+\bar{N}_{(2}(r,f)$$

$$\leqslant\left(1+\frac{1}{k}\right)\bar{N}_{(2}(r,f)+\frac{1}{k}\left\{\bar{N}\left(r,\frac{1}{f^{(k)}-1}\right)\right.$$

$$\left.+N_0\left(r,\frac{1}{f^{(k+1)}}\right)+m\left(r,\frac{g'}{g}\right)+\log\left|\frac{g(0)}{g'(0)}\right|\right\}$$

$$\leqslant\left(1+\frac{1}{k}\right)\left\{N\left(r,\frac{1}{f}\right)+\bar{N}\left(r,\frac{1}{f^{(k)}-1}\right)\right.$$

$$\left.-N_0\left(r,\frac{1}{f^{(k+1)}}\right)+S(r,f)\right\}+\frac{1}{k}\left\{\bar{N}\left(r,\frac{1}{f^{(k)}-1}\right)\right.$$

$$\left.+N_0\left(r,\frac{1}{f^{(k+1)}}\right)+m\left(r,\frac{g'}{g}\right)+\log\left|\frac{g(0)}{g'(0)}\right|\right\},$$

其中 $g(z)$ 由(4.5.1)给出.

在 Milloux 不等式(4.2.9)中, $\bar{N}(r,f)$ 用上式取代即得

$$T(r,f)<\left(2+\frac{1}{k}\right)N\left(r,\frac{1}{f}\right)+\left(2+\frac{2}{k}\right)$$

$$\times\bar{N}\left(r,\frac{1}{f^{(k)}-1}\right)-2N_0\left(r,\frac{1}{f^{(k+1)}}\right)+S_k(r,f).$$

这里

$$S_k(r,f)=\left(2+\frac{1}{k}\right)S(r,f)$$

$$+\frac{1}{k}\left\{m\left(r,\frac{g'}{g}\right)+\log\left|\frac{g(0)}{g'(0)}\right|\right\}.$$

由 $g(z)$的表达式(4.5.1)有

$$\frac{g'(z)}{g(z)}=\frac{(k+1)f^{(k+2)}(z)}{f^{(k+1)}(z)}-\frac{(k+2)f^{(k+1)}(z)}{f^{(k)}(z)-1}.$$

从而

$$\log\left|\frac{g(0)}{g'(0)}\right|$$

$$=\log\left|\frac{f^{(k+1)}(0)(f^{(k)}(0)-1)}{(k+1)f^{(k+2)}(0)(f^{(k)}(0)-1)-(k+2)f^{(k+1)}(0)^2}\right|.$$

由

$$\left|\frac{g'(z)}{g(z)}\right|\leqslant(k+2)\left(\left|\frac{f^{(k+2)}(z)}{f^{(k+1)}(z)}\right|+\left|\frac{f^{(k+1)}(z)}{f^{(k)}(z)-1}\right|\right),$$

得

$$m\left(r,\frac{g'}{g}\right)\leqslant m\left(r,\frac{f^{(k+2)}}{f^{(k+1)}}\right)+m\left(r,\frac{f^{(k+1)}}{f^{(k)}-1}\right)$$
$$+\log(k+2)+\log 2.$$

于是

$$S_k(r,f)\leqslant\left(2+\frac{2}{k}\right)m\left(r,\frac{f^{(k+1)}}{f^{(k)}-1}\right)+\frac{1}{k}m\left(r,\frac{f^{(k+2)}}{f^{(k+1)}}\right)$$
$$+\left(2+\frac{1}{k}\right)m\left(r,\frac{f^{(k)}}{f}\right)+\left(2+\frac{1}{k}\right)m\left(r,\frac{f^{(k+1)}}{f}\right)$$
$$+\left(2+\frac{1}{k}\right)\log\left|\frac{f(0)(f^{(k)}(0)-1)}{f^{(k+1)}(0)}\right|$$
$$+\frac{1}{k}\log\left|\frac{f^{(k+1)}(0)(f^{(k)}(0)-1)}{(k+1)f^{(k+2)}(0)(f^{(k)}(0)-1)-(k+2)f^{(k+1)}(0)^2}\right|$$
$$+\frac{1}{k}\log(2k+4)+\left(2+\frac{1}{k}\right)\log 2.$$

由于

$$\frac{1}{k}\log(2k+4)+\left(2+\frac{1}{k}\right)\log 2$$

$$\leqslant \log 6+3\log 2<4,$$

这便证明了定理结论.

系. 设 $f(z)$是开平面上的超越亚纯函数，则或者 $f(z)$取每个有穷复数无穷多次，或者对于所有正整数 k，$f^{(k)}(z)$ 取每个有穷非零复数无穷多次.

4.5.2. 亚纯函数的一个正规定则

Hayman 曾经猜测相应于定理 4.11 的正规定则应该成立，最近顾永兴[2] 已经成功地证明了这个结果．这里我们给出一个较为简单的证明.

引理 4.6. 设函数 $f(z)$于 $|z|<1$ 内亚纯，且 $f(z)\neq 0$，$f^{(k)}(z)\neq 1$，则在 $|z|<\frac{1}{32}$ 内或者恒有 $|f(z)|<1$ 或者恒有

$$\frac{1}{|f(z)|}<C_k.$$

证．区分两种情况.

(1) 在 $|z|<\frac{1}{8}$ 内恒有 $\sum\limits_{j=0}^{k+1}|f^{(j)}(z)|\geqslant\frac{1}{4}$.

这时又区分为两种情况.

(1.1) 在 $|z|<\frac{1}{32}$ 内或者恒有 $|f(z)|\leqslant 1$ 或者恒有 $|f(z)|\geqslant 1$．这时引理结论显然成立.

(1.2) 在 $|z|<\frac{1}{32}$ 内存在 z_1 使 $|f(z_1)|=1$.

由于在 $|z-z_1|<\frac{3}{32}$ 内，

$$\frac{1}{|f(z)|}\leqslant 4\sum_{j=0}^{k+1}\left|\frac{f^{(j)}(z)}{f(z)}\right|,$$

于是当 $0 < r < \frac{3}{32}$ 时有

$$m\left(r, z_1, \frac{1}{f}\right) \leqslant \sum_{j=0}^{k+1} m\left(r, z_1, \frac{f^{(j)}}{f}\right) + \log 4(k+2).$$

由引理 4.3 估计 $m\left(r, z_1, \frac{f^{(j)}}{f}\right)$，再应用引理 2.4 消去出现的项 $\log^+ T(\rho, z_1, f)$ 可得

$$T\left(\frac{5}{64}, z_1, \frac{1}{f}\right) < C_k.$$

因此

$$\log M\left(\frac{1}{16}, z_1, \frac{1}{f}\right) < C_k. \tag{4.5.11}$$

从而

$$\log M\left(\frac{1}{32}, \frac{1}{f}\right) < C_k.$$

(2) 在 $|z| < \frac{1}{8}$ 内存在点 z_2 使 $\sum_{j=0}^{k+1} |f^{(j)}(z_2)| < \frac{1}{4}$.

再区分两种情况.

(2.1) 在 $|z| < \frac{1}{8}$ 内恒有 $|f^{(k+1)}(z)| < \frac{1}{4}$. 于是在 $|z| < \frac{1}{8}$ 内有

$$|f(z)| \leqslant \sum_{j=0}^{k} |f^{(j)}(z_2)| + \left|\int_{\overline{z_2 z}} f^{(k+1)}(\zeta) d\zeta\right| < 1. \tag{4.5.12}$$

(2.2) 在 $|z| < \frac{1}{8}$ 内存在使 $|f^{(k+1)}(z)| \geqslant \frac{1}{4}$ 的点. 于是在 $|z| < \frac{1}{8}$ 内存在点 z_3 使

$$|f^{(k+1)}(z_3)| = \frac{1}{4},$$

且在 $\overline{z_2 z_3}$ 上有 $|f^{(k+1)}(z)| < \frac{1}{4}$. 因此对于 $\overline{z_2 z_3}$ 上的任意点 z 有

$$|f^{(k)}(z)| \leqslant |f^{(k)}(z_2)| + \left|\int_{\overline{z_2 z}} f^{(k+1)}(\zeta)d\zeta\right|$$

$$\leqslant |f^{(k)}(z_2)| + \frac{1}{16} < \frac{5}{16}.$$

$$|f(z_3)| \leqslant \sum_{j=0}^{k} |f^{(j)}(z_2)| + \left|\int_{\overline{z_2 z_3}} f^{(k+1)}(\zeta)d\zeta\right|$$

$$\leqslant \sum_{j=0}^{k} |f^{(j)}(z_2)| + \frac{1}{16} < \frac{5}{16}.$$

这时又区分两种情况.

(2.2.1) $|f^{(k+2)}(z_3)| \geqslant \frac{1}{2}$.

在 $|z - z_3| \leqslant r\left(0 < r < \frac{7}{8}\right)$ 内对于 $f(z)$ 应用定理 4.11,

$$T(r, z_3, f) < \left(2 + \frac{2}{k}\right) m\left(r, z_3, \frac{f^{(k+1)}}{f^{(k)} - 1}\right) + \left(2 + \frac{1}{k}\right)$$

$$\times \left\{m\left(r, z_3, \frac{f^{(k+1)}}{f}\right) + m\left(r, z_3, \frac{f^{(k)}}{f}\right)\right\}$$

$$+ \frac{1}{k} m\left(r, z_3, \frac{f^{(k+2)}}{f^{(k+1)}}\right) + 4$$

$$+ \left(2 + \frac{1}{k}\right)\log\left|\frac{f(z_3)(f^{(k)}(z_3) - 1)}{f^{(k+1)}(z_3)}\right| + \frac{1}{k}$$

$$\times \log\left|\frac{f^{(k+1)}(z_3)(f^{(k)}(z_3) - 1)}{(k+1)f^{(k+2)}(z_3)(f^{(k)}(z_3) - 1) - (k+2)f^{(k+1)}(z_3)^2}\right|.$$

取 $0 < r < \rho' < \rho < \frac{7}{8}$, $\rho' = \frac{\rho + r}{2}$. 对于

$$\left(2 + \frac{2}{k}\right) m\left(r, z_3, \frac{f^{(k+1)}}{f^{(k)} - 1}\right) \leqslant 4m\left(r, z_3, \frac{f^{(k+1)}}{f^{(k)} - 1}\right),$$

$$\frac{1}{k} m\left(r, z_3, \frac{f^{(k+2)}}{f^{(k+1)}}\right) \leqslant m\left(r, z_3, \frac{f^{(k+2)}}{f^{(k+1)}}\right),$$

应用 Nevanlinna 引理进行估计,分别出现了 $16\log^{+}T(\rho', z_3, f^{(k)})$

与 $4\log^+T(\rho', z_3, f^{(k+1)})$. 再由

$$\begin{aligned}
&16\log^+T(\rho', z_3, f^{(k)})\\
&\leqslant 16\log^+\left\{(k+1)T(\rho', z_3, f)+m\left(\rho', z_3, \frac{f^{(k)}}{f}\right)\right\}\\
&\leqslant 16\log^+T(\rho', z_3, f)+m\left(\rho', z_3, \frac{f^{(k)}}{f}\right)+C_k,\\
&4\log^+T(\rho', z_3, f^{(k+1)})\\
&\leqslant 4\log^+\left\{(k+2)T(\rho', z_3, f)+m\left(\rho', z_3, \frac{f^{(k+1)}}{f}\right)\right\}\\
&\leqslant 4\log^+T(\rho', z_3, f)+m\left(\rho', z_3, \frac{f^{(k+1)}}{f}\right)+C_k,
\end{aligned}$$

有

$$\begin{aligned}
T(r, z_3, f) < {} & C_k\left\{1+\log^+\frac{1}{r}+\log^+\frac{1}{\rho'-r}\right.\\
&\left.+\log^+T(\rho', z_3, f)\right\}+16\log^+\log^+\frac{1}{|f^{(k)}(z_3)-1|}\\
&+4\log^+\log^+\frac{1}{|f^{(k+1)}(z_3)|}+\left(2+\frac{1}{k}\right)\log|f(z_3)|\\
&+2\log\frac{1}{|f^{(k+1)}(z_3)|}+\left(2+\frac{2}{k}\right)\log|f^{(k)}(z_3)-1|\\
&+\frac{1}{k}\log\frac{1}{|(k+1)f^{(k+2)}(z_3)(f^{(k)}(z_3)-1)-(k+2)f^{(k+1)}(z_3)^2|}\\
&+\left(3+\frac{1}{k}\right)\left\{m\left(\rho', z_3, \frac{f^{(k+1)}}{f}\right)+m\left(\rho', z_3, \frac{f^{(k)}}{f}\right)\right\}.
\end{aligned}$$

对上式右端最后两项应用引理 4.3 得

$$\begin{aligned}
&T(r, z_3, f)+\log\frac{1}{|f(z_3)|}\\
&\quad< C_k\left\{1+\log^+\frac{1}{r}+\log^+\frac{1}{\rho-r}+\log^+T(\rho, z_3, f)\right\}
\end{aligned}$$

$$+\left(1+\frac{1}{k}\right)\log|f(z_3)|+C_k\log^+\log^+\frac{1}{|f(z_3)|}$$

$$+\left(2+\frac{2}{k}\right)\log|f^{(k)}(z_3)-1|+16\log^+\log^+\frac{1}{|f^{(k)}(z_3)-1|}$$

$$+2\log\frac{1}{|f^{(k+1)}(z_3)|}+4\log^+\log^+\frac{1}{|f^{(k+1)}(z_3)|}$$

$$+\frac{1}{k}\log\frac{1}{|(k+1)f^{(k+2)}(z_3)(f^{(k)}(z_3)-1)-(k+2)f^{(k+1)}(z_3)^2|}.$$

即

$$T\left(r,z_3,\frac{1}{f}\right)<C_k\left\{1+\log^+\frac{1}{r}+\log^+\frac{1}{\rho-r}\right.$$

$$\left.+\log^+T\left(\rho,z_3,\frac{1}{f}\right)+\log^+\log^+|f(z_3)|\right\}$$

$$+\left(1+\frac{1}{k}\right)\log^+|f(z_3)|+\left(2+\frac{2}{k}\right)\log^+|f^{(k)}(z_3)|$$

$$+3\log^+\frac{1}{|f^{(k+1)}(z_3)|}+\frac{1}{k}$$

$$\times\log\frac{1}{|(k+1)f^{(k+2)}(z_3)(f^{(k)}(z_3)-1)-(k+2)f^{(k+1)}(z_3)^2|}.$$

回忆

$$|f(z_3)|<\frac{5}{16},\quad|f^{(k)}(z_3)|<\frac{5}{16},\quad|f^{(k+1)}(z_3)|=\frac{1}{4}$$

以及

$$|(k+1)f^{(k+2)}(z_3)(f^{(k)}(z_3)-1)-(k+2)f^{(k+1)}(z_3)^2|$$

$$\geqslant\frac{k+1}{4}-\frac{k+2}{16}=\frac{3k+2}{16}>\frac{1}{4},$$

于是对于 $0<r<\rho<\frac{7}{8}$ 有

$$T\left(r,z_3,\frac{1}{f}\right)<C_k\left\{1+\log^+\frac{1}{r}+\log^+\frac{1}{\rho-r}\right.$$

$$+\log^+ T\left(\rho, z_3, \frac{1}{f}\right)\Big\}. \tag{4.5.13}$$

再应用引理2.4消去 $\log^+ T\left(\rho, z_3, \frac{1}{f}\right)$ 得

$$T\left(\frac{1}{2}, z_3, \frac{1}{f}\right) < C_k.$$

从而

$$M\left(\frac{1}{8}, \frac{1}{f}\right) \leqslant M\left(\frac{1}{4}, z_3, \frac{1}{f}\right) \leqslant e^{\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}} T\left(\frac{1}{2}, z_3, \frac{1}{f}\right)} < C_k.$$

(2.2.2) $|f^{(k+2)}(z_3)| < \frac{1}{2}$.

这时又区分为两种情况.

(2.2.2.1) 在 $|z| < \frac{1}{8}$ 内恒有 $|f^{(k+2)}(z)| < \frac{1}{2}$. 于是对于 $|z| < \frac{1}{8}$ 内的任意点 z 有

$$|f(z)| \leqslant \sum_{j=0}^{k+1} |f^{(j)}(z_3)| + \left|\int_{\overline{z_3 z}} f^{(k+2)}(\zeta) d\zeta\right| < 1.$$

(2.2.2.2) 在 $|z| < \frac{1}{8}$ 内存在点 z_4 使 $|f^{(k+2)}(z_4)| = \frac{1}{2}$, 且在 $\overline{z_3 z_4}$ 上恒有 $|f^{(k+2)}(z)| < \frac{1}{2}$. 因此

$$\begin{aligned}|f^{(k+1)}(z_4)| &\leqslant |f^{(k+1)}(z_3)| + \left|\int_{\overline{z_3 z_4}} f^{(k+2)}(z) dz\right| \\ &< \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} = \frac{3}{8},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|f^{(k+1)}(z_4)| &\geqslant |f^{(k+1)}(z_3)| - \left|\int_{\overline{z_3 z_4}} f^{(k+2)}(z) dz\right| \\ &> \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{8},\end{aligned}$$

以及

$$|f^{(k)}(z_4)| \leqslant |f^{(k)}(z_3)| + \left|\int_{\overline{z_3 z_4}} f^{(k+1)}(z)dz\right|$$
$$< \frac{5}{16} + \frac{3}{8}\cdot\frac{1}{4} = \frac{13}{32},$$

$$|f(z_4)| \leqslant \sum_{j=0}^{k}\left| |f^{(j)}(z_3)| + \left|\int_{z_3 z_4} f^{(k+1)}(z)dz\right| < k+2.\right.$$

于是 $|f^{(k)}(z_4) - 1| > \frac{1}{2}$，从而

$$|(k+1)f^{(k+2)}(z_4)(f^{(k)}(z_4) - 1) - (k+2)f^{(k+1)}(z_4)^2|$$
$$\geqslant \frac{k+1}{4} - (k+2)\left(\frac{3}{8}\right)^2 = \frac{7k-2}{64} \geqslant \frac{5}{64}.$$

这时如同情况(2.2.1)可以推知 $\log M\left(\frac{1}{8}, \frac{1}{f}\right) < C_k$.

从引理 4.6 立即有顾永兴的正规定则.

定理 4.12. 设 $\mathscr{F}$ 为域 D 内的一族亚纯函数，k 为一正整数，a, b 为两个有穷复数且 b 不为 0. 若在 D 内对于 $\mathscr{F}$ 中任一函数 $f(z)$ 都有 $f(z) \neq a$，$f^{(k)}(z) \neq b$，则 $\mathscr{F}$ 在 D 内正规.

定理 4.11 与定理 4.12 分别是模分布与正规族方面的结果，与其相应地我们可以提出辐角分布的问题. 即

设 $f(z)$ 于开平面亚纯，级 λ 为有穷正数，是否存在一条从原点发出的半直线 $\arg z = \theta_0 (0 \leqslant \theta_0 < 2\pi)$ 具有下述性质：对于任意正数 ε，所有正整数 k 以及任意两个有穷复数 a, $b(b \neq 0)$ 有

$$\varlimsup_{r\to\infty} \frac{\log\{n(r, \theta_0, \varepsilon, f = a) + n(r, \theta_0, \varepsilon, f^{(k)} = b)\}}{\log r} = \lambda \tag{4.5.14}$$

看来这个问题的答案是肯定的，但是要解决它相当困难. 只有在无穷级时应用 G. Valiron 的一个方法不难得到证明.

第五章 亚纯函数的重值

在亚纯函数值分布论中，重级值点的影响如何是一个重要的课题，曾为 C. Carathéodory, P. Montel, G. Valiron, A. Bloch 等所注意，并获得一些有趣的结果. 在 R. Nevanlinna 的第二基本定理中，包含了重值密指量一 $N_1(r)$，可以用来讨论重值问题，已如第一章 § 1.4 所述. 现在我们进一步研究亚纯函数及其导数值分布中重级值点的影响.

§ 5.1. 涉及重值时的模分布

5.1.1. 拟 Borel 例外值

设函数 $f(z)$ 于开平面亚纯，a 为一任意复数，l 为一正整数. 以 $\bar{n}_{l)}\left(r, \frac{1}{f-a}\right)$ 或 $\bar{n}_{l)}(r, f=a)$ 或 $\bar{n}_{l)}(r, a)$ 表示 $|z|\leqslant r$ 上 $f(z)-a$ 的重级不超过 l 的零点数目，且重级零点仅计一次；以 $\bar{n}_{(l+1}\left(r, \frac{1}{f-a}\right)$ 或 $\bar{n}_{(l+1}(r, f=a)$ 或 $\bar{n}_{(l+1}(r, a)$ 表示 $|z|\leqslant r$ 上 $f(z)-a$ 重级大于 l 的零点数目，重级零点也计算一次. 相应的密指量记为 $\bar{N}_{l)}\left(r, \frac{1}{f-a}\right)$ 或 $\bar{N}_{l)}(r, f=a)$ 或 $\bar{N}_{l)}(r, a)$ 以及 $\bar{N}_{(l+1}\left(r, \frac{1}{f-a}\right)$ 或 $\bar{N}_{(l+1}(r, f=a)$ 或 $\bar{N}_{(l+1}(r, a)$. 与上述诸量相似的，我们还采用记号 $n_{l)}\left(r, \frac{1}{f-a}\right)$, $n_{(l+1}\left(r, \frac{1}{f-a}\right)$, $N_{l)}\left(r, \frac{1}{f-a}\right)$ 与 $N_{(l+1}\left(r, \frac{1}{f-a}\right)$, 其中重级零点按重数计算.

定义 5.1. 设亚纯函数 $f(z)$ 的级 λ 为有穷正数，复数 a 称为 $f(z)$ 的 l 级拟 Borel 例外值，如果

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log \bar{n}_{l)}(r,a)}{\log r} < \lambda. \tag{5.1.1}$$

引理 5.1. 在上述记号下，a 是 $f(z)$的一个 l 级拟 Borel 例外值的必要且充分的条件是

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log \bar{N}_{l)}(r,\ a)}{\log r} < \lambda \tag{5.1.2}$$

证. 若 a 是 $f(z)$ 的一个 l 级拟 Borel 例外值，则存在相应的数 τ，$0<\tau<\lambda$，使当 $r>r_0$ 时有

$$\bar{n}_{l)}(r,\ a) < r^{\tau}.$$

于是

$$\begin{aligned}\bar{N}_{l)}(r,\ a) &= \bar{N}_{l)}(r_0,\ a) + \int_{r_0}^{r} \frac{\bar{n}_{l)}(t,\ a)}{t}\,dt \\ &\leqslant \bar{N}_{l)}(r_0,\ a) + \frac{r^{\tau}}{\tau}.\end{aligned}$$

从而

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log \bar{N}_{l)}(r,\ a)}{\log r} \leqslant \tau < \lambda.$$

反之，如果(5.1.2)成立，则当 $r>r_0$ 时有

$$\bar{N}_{l)}(r,\ a) < r^{\tau}, \qquad (\tau<\lambda).$$

于是

$$\begin{aligned}\bar{n}_{l)}(r,\ a) &= \frac{\bar{n}_{l)}(r,\ a)}{\log 2}\int_{r}^{2r}\frac{dt}{t} \\ &\leqslant \frac{1}{\log 2}\int_{r}^{2r}\frac{\bar{n}_{l)}(t,\ a)}{t}\,dt \\ &\leqslant \frac{1}{\log 2}\bar{N}_{l)}(2r,\ a) < \frac{(2r)^{\tau}}{\log 2}.\end{aligned}$$

从而

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log \bar{n}_{l)}(r,\ a)}{\log r} \leqslant \tau < \lambda.$$

定理 5.1. 设 $f(z)$为开平面上的有穷正级亚纯函数，$a_\nu(\nu=1,$

$2,\cdots,q$) 为一组互相判别的复数，$l_\nu \geqslant 2(\nu=1,2,\cdots,q)$ 为一组整数. 若 $f(z)$以 $a_\nu(\nu=1,2,\cdots,q)$ 为 $l_\nu-1$ 级拟 Borel 例外值，则

$$\sum_{\nu=1}^{q}\left(1-\frac{1}{l_\nu}\right)\leqslant 2. \tag{5.1.3}$$

证. 当 $q\leqslant 2$ 时，(5.1.3)式是明显的.

当 $q\geqslant 3$ 时，对于 $f(z)$与 $a_\nu(\nu=1,2,\cdots,q)$ 应用 R. Nevanlinna 第二基本定理则

$$(q-2)T(r,f)<\sum_{\nu=1}^{q}\bar{N}\left(r,\frac{1}{f-a_\nu}\right)+O(\log r).$$

注意到

$$\bar{N}\left(r,\frac{1}{f-a_\nu}\right)=\bar{N}_{l_\nu-1)}\left(r,\frac{1}{f-a_\nu}\right)+\bar{N}_{(l_\nu}\left(r,\frac{1}{f-a_\nu}\right)$$

以及

$$\bar{N}_{(l_\nu}\left(r,\frac{1}{f-a_\nu}\right)\leqslant\frac{1}{l_\nu}N_{(l_\nu}\left(r,\frac{1}{f-a_\nu}\right),$$

则

$$\begin{aligned}\bar{N}\left(r,\frac{1}{f-a_\nu}\right)&\leqslant\frac{l_\nu-1}{l_\nu}\bar{N}_{l_\nu-1)}\left(r,\frac{1}{f-a_\nu}\right)\\&\quad+\frac{1}{l_\nu}\bar{N}_{l_\nu-1)}\left(r,\frac{1}{f-a_\nu}\right)+\frac{1}{l_\nu}N_{(l_\nu}\left(r,\frac{1}{f-a_\nu}\right)\\&\leqslant\frac{l_\nu-1}{l_\nu}\bar{N}_{l_\nu-1)}\left(r,\frac{1}{f-a_\nu}\right)+\frac{1}{l_\nu}N\left(r,\frac{1}{f-a_\nu}\right)\\&\leqslant\frac{l_\nu-1}{l_\nu}\bar{N}_{l_\nu-1)}\left(r,\frac{1}{f-a_\nu}\right)+\frac{1}{l_\nu}T(r,f)+O(1)\\&\qquad\qquad(\nu=1,2,\cdots,q).\end{aligned}$$

于是

$$\left(q-2-\sum_{\nu=1}^{q}\frac{1}{l_\nu}\right)T(r,f)$$

$$< \sum_{\nu=1}^{q} \frac{l_\nu - 1}{l_\nu} \overline{N}_{l_\nu - 1)}\left(r, \frac{1}{f - a_\nu}\right) + O(\log r). \qquad (5.1.4)$$

因为 $f(z)$ 以 $a_\nu(\nu = 1,2,\cdots,q)$ 为 $l_\nu - 1$ 级拟 Borel 例外值，根据引理 5.1，(5.1.4)式右端的级小于 λ. 于是左端 $T(r,f)$的系数不能大于 0，从而有(5.1.3)式.

系. 有穷正级亚纯函数 $f(z)$的 l 级拟 Borel 例外值的数目不超过 $\frac{2(l+1)}{l}$ 个. 特别地，$f(z)$的单级拟 Borel 例外值不超过 4 个；二级拟 Borel 例外值不超过 3 个；三级拟 Borel 例外值不超过 2 个.

定理和系中的结论是精确的. 例如 $l = 1$ 时考察函数

$$\zeta = \int_0^z \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-\rho^2 t^2)}}, \qquad (5.1.5)$$

其中 ρ 是满足 $0 < \rho < 1$ 的实数. 这个函数将上半平面共形映照于矩形，其逆 $z = S(\zeta)$ 是椭圆函数，$S(\zeta)$ 有四个重值 ± 1，$\pm \frac{1}{\rho}$. 这四个值便是 $S(\zeta)$ 的单级拟 Borel 例外值.

当 $f(z)$为整函数，$a_\nu(\nu = 1,2,\cdots,q)$ 为一组互相判别的有穷复数时，类似于(5.1.4)式的推导有

$$\left(q - 1 - \sum_{\nu=1}^{q} \frac{1}{l_\nu}\right) T(r,f) < \sum_{\nu=1}^{q} \frac{l_\nu - 1}{l_\nu} \overline{N}_{l_\nu - 1)}\left(r, \frac{1}{f - a_\nu}\right) + O(\log r).$$

定理 5.1′ 若 $f(z)$为有穷正级整函数，以判别的有穷复数 $a_\nu(\nu = 1,2,\cdots,q)$ 为 $l_\nu - 1$ 级拟 Borel 例外值，则

$$\sum_{\nu=1}^{q}\left(1 - \frac{1}{l_\nu}\right) \leqslant 1.$$

特别地，$f(z)$ 有穷的单级拟 Borel 例外值数目不超过 2. 如果 $f(z)$以某有穷复数 a_0 为二级拟 Borel 例外值，则除去 a_0 外 $f(z)$没有有穷的单级拟 Borel 例外值.

G. Valiron[2] 曾采用较巧妙的方法证明过定理 5.1'.

5.1.2. 涉及重值的亏量

设 $f(z)$ 为开平面上的超越亚纯函数，l 为一正整数. 相应于通常的亏量，我们引入

$$\delta_{l)}(a, f) = 1 - \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\overline{N}_{l)}\left(r, \frac{1}{f-a}\right)}{T(r, f)}. \qquad (5.1.6)$$

显然 $0 \leqslant \delta_{l)}(a, f) \leqslant 1$.

若 $a_\nu(\nu = 1, 2, \cdots, q)$ 为 $q(>2)$ 个互相判别的复数. 如同 (5.1.4)式有

$$\left(q - 2 - \frac{q}{l+1}\right) T(r, f)$$

$$< \frac{l}{l+1} \sum_{\nu=1}^{q} \overline{N}_{l)}\left(r, \frac{1}{f-a_\nu}\right) + S(r, f).$$

于是

$$\frac{l}{l+1} \sum_{\nu=1}^{q} \left(1 - \frac{\overline{N}_{l)}\left(r, \frac{1}{f-a_\nu}\right)}{T(r, f)}\right) < 2 + \frac{S(r, f)}{T(r, f)}.$$

从而

$$\sum_{\nu=1}^{q} \delta_{l)}(a_\nu, f) = \sum_{\nu=1}^{q} \underline{\lim_{r\to\infty}} \left(1 - \frac{\overline{N}_{l)}\left(r, \frac{1}{f-a_\nu}\right)}{T(r, f)}\right)$$

$$\leqslant \underline{\lim_{r\to\infty}} \sum_{\nu=1}^{q} \left(1 - \frac{\overline{N}_{l)}\left(r, \frac{1}{f-a_\nu}\right)}{T(r, f)}\right)$$

$$\leqslant \underline{\lim_{r\to\infty}} \frac{l+1}{l} \left(2 + \frac{S(r, f)}{T(r, f)}\right)$$

$$\leqslant \frac{l+1}{l} \left(\overline{\lim_{r\to\infty}}\, 2 + \underline{\lim_{r\to\infty}} \frac{S(r, f)}{T(r, f)}\right) = \frac{2(l+1)}{l}.$$

定理 5.2. 若 $f(z)$ 为一超越亚纯函数，则由 (5.1.6) 式确定的 $\delta_{l)}(a,f)$ 具有下述性质

(1) 对于所有的复数 a 有 $0 \leqslant \delta_{l)}(a,f) \leqslant 1$；

(2) 使 $\delta_{l)}(a,f)$ 为正数的复数 a 至多为一可数集，并且

$$\sum_a \delta_{l)}(a,f) \leqslant \frac{2(l+1)}{l}. \tag{5.1.7}$$

上式右端的围界是准确的. 例如 $l=1$ 时由(5.1.5)确定的椭圆函数 $z=S(\zeta)$ 有

$$\begin{aligned}\delta_{1)}(1,S(\zeta)) &= \delta_{1)}(-1,S(\zeta))\\ &= \delta_{1)}\left(\frac{1}{\rho},\ S(\zeta)\right) = \delta_{1)}\left(-\frac{1}{\rho},\ S(\zeta)\right) = 1.\end{aligned}$$

从而 $\sum\delta_{1)}(a,S(\zeta)) = 4$.

关于 § 5.1. 里的概念和结果可参阅杨乐[1]. 在该文里他还论述了涉及重值时的唯一性问题.

关于涉及重值的模分布，也可以结合导数加以考虑. 例如我们有下述结论.

设函数 $f(z)$ 于开平面亚纯，级 λ 为有穷正数. 又设 j, l, p 为三个大于 1 的整数. 若 $f(z)$ 以 ∞ 为 $j-1$ 级拟 Borel 例外值，以某有穷复数 a 为 $l-1$ 级拟 Borel 例外值，其 k 级导数 $f^{(k)}(z)$ 以某有穷非零复数 b 为 $p-1$ 级拟 Borel 例外值，则

$$\frac{1}{j}+\frac{k+1}{l}+\frac{1}{p}+\frac{k}{jp} \geqslant 1. \tag{5.1.8}$$

事实上 Milloux 不等式(4.2.9)可以写为

$$\begin{aligned}T(r,f) &< \bar{N}(r,f) + N\left(r,\frac{1}{f-a}\right)\\ &\quad + N\left(r,\frac{1}{f^{(k)}-b}\right) - N\left(r,\frac{1}{f^{(k+1)}}\right) + S(r,f)\\ &\leqslant \bar{N}(r,f) + (k+1)\bar{N}\left(r,\frac{1}{f-a}\right)\\ &\quad + \bar{N}\left(r,\frac{1}{f^{(k)}-b}\right) + S(r,f).\end{aligned} \tag{5.1.9}$$

根据假设，存在正数 ε，使得

$$\overline{N}\left(r, \frac{1}{f-a}\right) = \overline{N}_{l-1)}\left(r, \frac{1}{f-a}\right) + \overline{N}_{(l}\left(r, \frac{1}{f-a}\right)$$

$$\leqslant o(r^{\lambda-\varepsilon}) + \frac{1}{l} T(r, f),$$

$$\overline{N}\left(r, \frac{1}{f^{(k)}-b}\right) = \overline{N}_{p-1)}\left(r, \frac{1}{f^{(k)}-b}\right) + \overline{N}_{(p}\left(r, \frac{1}{f^{(k)}-b}\right)$$

$$\leqslant o(r^{\lambda-\varepsilon}) + \frac{1}{p} T(r, f^{(k)})$$

$$\leqslant o(r^{\lambda-\varepsilon}) + \frac{1}{p}\{T(r, f) + k\overline{N}(r, f)\}.$$

$$\left(1+\frac{k}{p}\right)\overline{N}(r, f) = \left(1+\frac{k}{p}\right)\{\overline{N}_{j-1)}(r, f) + \overline{N}_{(j}(r, f)\}$$

$$\leqslant o(r^{\lambda-\varepsilon}) + \frac{1+\frac{k}{p}}{j} T(r, f).$$

在(5.1.9)式中计及以上这些估计即得

$$\left\{1 - \frac{1}{j} - \frac{k+1}{l} - \frac{1}{p} - \frac{k}{jp}\right\} T(r, f) < o(r^{\lambda-\varepsilon}).$$

但是 $T(r, f)$ 的级为 λ，于是上式左端系数不能为正，这样即得(5.1.8).

当 $f(z)$为整函数时，则可取 $j \to \infty$，于是(5.1.8)即为

$$\frac{k+1}{l} + \frac{1}{p} \geqslant 1. \tag{5.1.10}$$

特别地，若 $k=1$ 则取 $l = p = 4$，(5.1.10)便不再成立．因而我们有下述结论．

设 $f(z)$为有穷正级整函数，则以下两种情况不能同时发生

1）$f(z)$以某有穷复数 a 为 3 级拟 Borel 例外值，

2）$f'(z)$以某有穷非零复数 b 为 3 级拟 Borel 例外值．

现在我们对上述事实另外给出一个有趣的证明．这种方法本

质上是属于 Valiron[2]的.

设 $f(z)$和 $f'(z)$ 分别以 $a(\neq\infty)$ 和 $b(\neq 0,\infty)$ 为 3 级拟 Borel 例外值. 以 $f(z)-a$ 的重级不超过 3 的零点构作典型乘积 $P(z,a)$, 以 $f'(z)-b$ 的重级不超过 3 的零点构作典型乘积 $Q(z,b)$. 它们的级都小于 λ. 考虑

$$F(z)=\frac{P(z,a)^2Q(z,b)^3(f'')^4}{(f-a)^2(f'-b)^3}, \tag{5.1.11}$$

可以看出 $F(z)$是整函数,由 (5.1.11) 有

$$m(r,F(f-a))\leqslant 2m(r,P)+3m(r,Q)$$
$$+m\left(r,\frac{f''}{f-a}\right)+3m\left(r,\frac{f''}{f'-b}\right).$$

上式右端的级小于 λ,于是左端的级也小于 λ. 再应用第一基本定理有

$$N\left(r,\frac{1}{f-a}\right)\leqslant N\left(r,\frac{1}{F(f-a)}\right)$$
$$\leqslant m(r,F(f-a))+O(1).$$

即 $f(z)$ 以 a 为 Borel 例外值. 同理可以推知 $f'(z)$ 以 b 为 Borel 例外值. 但是这与定理 4.3 的系 2 相矛盾.

§ 5.2. 正规定则与重值

5.2.1. 界囿定理

为了寻求结合于重值的正规定则,我们先建立

定理 5.3. 设函数 $f(z)$ 在$|z|<R(<\infty)$ 内亚纯,且以 q 个互相判别的复数 $a_\nu(\nu=1,2,\cdots,q)$ 为级 $\geqslant l_\nu(l_\nu\geqslant 2,\nu=1,2,\cdots,q)$的重值. 若

$$\sum_{\nu=1}^{q}\left(1-\frac{1}{l_\nu}\right)>2, \tag{5.2.1}$$

且 $f(0)\neq 0,\infty$; $f'(0)\neq 0$, 则对于 $0<r<R$ 有

$$T(r,f)<C_q\left\{\log^+|f(0)|+\log^+\frac{1}{|f'(0)|}\right.$$

$$\left.+\log^+\frac{1}{\delta}+\log^+\frac{1}{R}+\log\frac{2R}{R-r}\right\}. \quad (5.2.2)$$

这里 C_q 为仅依于 q 的常数(每次出现时不必具有相同数值),

$$\delta=\min_{\substack{1\leqslant\nu\leqslant q\\ 1\leqslant\nu_1\neq\nu_2\leqslant q\ a_\nu\neq\infty}}\{|a_\nu,\infty|,|a_{\nu_1},a_{\nu_2}|\}. \quad (5.2.3)$$

证. 我们先设 $a_\nu(\nu=1,2,\cdots,q)$ 均为有穷复数. 对 $f(z)$ 与 $a_\nu(\nu=1,2,\cdots,q)$应用 Nevanlinna 第二基本定理(定理 1.5)有

$$(q-2)T(r,f)<\sum_{\nu=1}^{q}\bar{N}\left(r,\frac{1}{f-a_\nu}\right)+S(r,f), \quad (5.2.4)$$

其中

$$S(r,f)=\sum_{\nu=1}^{q}\log|f(0)-a_\nu|+m\left(r,\frac{f'}{f-a_1}\right)$$

$$+\sum_{\nu=1}^{q}m\left(r,\frac{f'}{f-a_\nu}\right)+\log\frac{1}{|f'(0)|}+C_q\left(\log^+\frac{1}{\delta}+1\right).$$

由于 $f(z)$ 以 a_ν 为级 $\geqslant l_\nu$ 的重值,于是

$$\bar{N}\left(r,\frac{1}{f-a_\nu}\right)\leqslant\frac{1}{l_\nu}N\left(r,\frac{1}{f-a_\nu}\right)$$

$$\leqslant\frac{1}{l_\nu}\left\{T(r,f)+\log^+|a_\nu|+\log 2+\log\frac{1}{|f(0)-a_\nu|}\right\}$$

$$(\nu=1,2,\cdots,q).$$

对于 $m\left(r,\frac{f'}{f-a_1}\right)$ 与 $\sum_{\nu=1}^{q}m\left(r,\frac{f'}{f-a_\nu}\right)$, 应用 Nevanlinna 引理进行估计. 这样(5.2.4)可化为

$$\left\{\sum_{\nu=1}^{q}\left(1-\frac{1}{l_\nu}\right)-2\right\}T(r,f)<\sum_{\nu=2}^{q}\left\{\left(1-\frac{1}{l_\nu}\right)\log|f(0)-a_\nu|\right.$$

$$\left.+4\log^+\log^+\frac{1}{|f(0)-a_\nu|}\right\}+\left\{\left(1-\frac{1}{l_1}\right)\log|f(0)|\right.$$

$$+ 8\log^+\log^+\frac{1}{|f(0)|}\Big\} + \log\frac{1}{|f'(0)|} + C_q\Big(\log^+\frac{1}{\delta}$$

$$+ 1 + \log^+\rho + \log^+\frac{1}{r} + \log^+\frac{1}{\rho - r} + \log^+ T(\rho, f)\Big)$$

$$< C_q\Big\{\log^+|f(0)| + \log^+\frac{1}{|f'(0)|} + \log^+\frac{1}{\delta} + 1 + \log^+ R$$

$$+ \log^+\frac{1}{r} + \log^+\frac{1}{\rho - r} + \log^+ T(\rho, f)\Big\}$$

$$(0 < r < \rho < R).$$

应用引理 2.4 消去 $\log^+ T(\rho, f)$，并注意到在条件(5.2.1)成立时应有

$$\sum_{\nu=1}^{q}\left(1 - \frac{1}{l_\nu}\right) - 2 \geqslant \frac{1}{42}. \tag{5.2.5}$$

事实上，若 $q \geqslant 5$ 则

$$\sum_{\nu=1}^{q}\left(1 - \frac{1}{l_\nu}\right) - 2 \geqslant \frac{q}{2} - 2 \geqslant \frac{1}{2}.$$

若 $q = 4$，则使(5.2.1)式成立的 l_ν 的最有利的数值是 $l_1 = l_2 = l_3 = 2$，$l_4 = 3$．这时

$$\sum_{\nu=1}^{4}\left(1 - \frac{1}{l_\nu}\right) - 2 = \frac{1}{6}.$$

若 $q = 3$，则使(5.2.1)式成立的 l_ν 的最有利的数值有三组．第一组是 $l_1 = 2$，$l_2 = 3$，$l_3 = 7$，这时

$$\sum_{\nu=1}^{3}\left(1 - \frac{1}{l_\nu}\right) - 2 = \frac{1}{42}.$$

第二组是 $l_1 = 2$，$l_2 = 4$，$l_3 = 5$，这时

$$\sum_{\nu=1}^{3}\left(1 - \frac{1}{l_\nu}\right) - 2 = \frac{1}{20}.$$

第三组是 $l_1 = 3$，$l_2 = 3$，$l_2 = 4$．这时

$$\sum_{\nu=1}^{3}\left(1-\frac{1}{l_\nu}\right)-2=\frac{1}{12}.$$

于是

$$T(r,f)<C_q\left\{\log^+|f(0)|+\log^+\frac{1}{|f'(0)|}+\log^+\frac{1}{\delta}\right.$$

$$\left.+1+\log^+\frac{1}{r}+\log^+R+\log^+\frac{2}{R-r}\right\}.$$

令 $R=1$, $r\geqslant\frac{1}{2}$ 即有

$$T(r,f)<C_q\left\{\log^+|f(0)|+\log^+\frac{1}{|f'(0)|}\right.$$

$$\left.+\log^+\frac{1}{\delta}+\log\frac{2}{1-r}\right\}. \tag{5.2.6}$$

对于 $0<r<\frac{1}{2}$，由 $T(r,f)\leqslant T\left(\frac{1}{2},f\right)$ 易知(5.2.6)式也成立.

若 $R\neq1$，仅需命 $f(Rz)=g(z)$，注意到

$$T(r,f)=T\left(\frac{r}{R},g\right),$$

即可得定理结论.

当 $a_\nu(\nu=1,2,\cdots,q)$中有一个为∞时，定理也可如上得证.

5.2.2. 正规定则

我们进一步证明

引理 5.2. 设函数 $f(z)$在 $|z|<1$ 内亚纯，以 $a_\nu(\nu=1,2,\cdots,q)$为级 $\geqslant l_\nu(l_\nu\geqslant2;\ \nu=1,2,\cdots,q)$的重值，且由(5.2.3)表出的 δ 为正值. 若(5.2.1)成立，则必存在一个仅依赖于 δ 和 q 的数 σ，$0<\sigma<\frac{1}{2}$，使得在 $|z|\leqslant\sigma$ 内或者恒有 $|f(z)|>1$. 或者恒有 $|f(z)|<C_{q,\delta}$.

证. 命 σ, $0<\sigma<\frac{1}{2}$，为一待定的数. 如果在 $|z|\leqslant\sigma$ 内

恒有$|f(z)|>1$，则引理结论已经成立．否则必存在点 z_0，$|z_0|\leqslant\sigma$，使得$|f(z_0)|<1$．以下区分两种情况．

(1) 在$|z|\leqslant\sigma$ 上恒有$|f'(z)|<1$．

这时对于此圆内的任意点 z 有

$$|f(z)|\leqslant|f(z_0)|+\left|\int_{\overline{z_0z}}f'(\zeta)d\zeta\right|<2. \qquad (5.2.7)$$

(2) 在$|z|\leqslant\sigma$ 上存在使$|f'(z)|\geqslant1$ 的点．

显然这样的点构成闭集．于是存在点 z_1，它可能与 z_0 重合，使得$|f'(z_1)|\geqslant1$；而在 $\overline{z_0z_1}$ 上恒有$|f'(z)|<1$．因此

$$|f(z_1)|\leqslant|f(z_0)|+\left|\int_{\overline{z_0z_1}}f'(\zeta)d\zeta\right|<2.$$

无妨假定$|a_1|\leqslant|a_\nu|(\nu=2,3,\cdots,q)$，否则适当调换次序即可．函数 $f(z)-a_1$ 在

$$|z-z_1|<R\left(R=1-\sigma,\frac{1}{2}<R<1\right)$$

内亚纯，以 0 为级 $\geqslant l_1$ 的重值，以 $a_\nu-a_1(\nu=2,3,\cdots,q)$为级 $\geqslant l_\nu$ 的重值，并且

$$\sum_{\nu=1}^{q}\left(1-\frac{1}{l_\nu}\right)>2.$$

注意

$$\begin{aligned}|0,a_\nu-a_1|&=\frac{|a_\nu-a_1|}{(1+|a_\nu-a_1|^2)^{\frac{1}{2}}}\geqslant\frac{|a_\nu-a_1|}{(1+4|a_\nu|^2)^{\frac{1}{2}}}\\&\geqslant\frac{|a_\nu-a_1|}{2(1+|a_\nu|^2)^{\frac{1}{2}}}\geqslant\frac{|a_\nu-a_1|}{2(1+|a_\nu|^2)^{\frac{1}{2}}(1+|a_1|^2)^{\frac{1}{2}}}\\&=\frac{|a_\nu,a_1|}{2}\qquad(\nu=2,3,\cdots,q).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|a_\mu-a_1,a_\nu-a_1|&=\frac{|a_\mu-a_\nu|}{(1+|a_\mu-a_1|^2)^{\frac{1}{2}}(1+|a_\nu-a_1|^2)^{\frac{1}{2}}}\\&\geqslant\frac{|a_\mu-a_\nu|}{(1+4|a_\mu|^2)^{\frac{1}{2}}(1+4|a_\nu|^2)^{\frac{1}{2}}}\geqslant\frac{|a_\mu,a_\nu|}{4}\\&\qquad(2\leqslant\mu\neq\nu\leqslant q)\end{aligned}$$

$$|a_\nu - a_1, \infty| = \frac{1}{(1+|a_\nu - a_1|^2)^{\frac{1}{2}}} \geqslant \frac{1}{(1+4|a_\nu|^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\geqslant \frac{|a_\nu, \infty|}{2} \qquad (\nu = 2, 3, \cdots, q).$$

即

$$\min_{\substack{1\leqslant \nu \leqslant q \\ 1\leqslant \nu_1 \neq \nu_2 \leqslant q \\ a_\nu \neq \infty}} \{|a_\nu - a_1, \infty|, |a_{\nu_1} - a_1, a_{\nu_2} - a_1|\} \geqslant \frac{\delta}{4}.$$

并且[1] $f(z_1) - a_1 \neq 0, \infty$; $f'(z_1) \neq 0$. 于是在 $|z - z_1| < R$ 内可以对 $f(z) - a_1$ 应用定理5.3,

$$T(r, z_1, f - a_1) < C_q \left\{\log^+|f(z_1) - a_1| + \log^+ \frac{1}{|f'(z_1)|} + \log^+ \frac{1}{\frac{\delta}{4}} + \log^+ \frac{1}{R} + \log \frac{2R}{R - r}\right\},$$

其中 δ 由(5.2.3)给出.

由于 $|a_1, \infty| \geqslant \delta$, 易见 $|a_1| < \frac{1}{\delta}$. 再计及 $|f(z_1)| < 2$ 与 $|f'(z_1)| \geqslant 1$ 即有

$$T\left(\frac{R}{2}, z_1, f\right) < C_{q,\delta},$$

其中 $C_{q,\delta}$ 为仅依赖于 q 与 δ 的常数.

倘若 b 是 $f(z)$ 在 $|z - z_1| < \frac{R}{2}$ 内的任意一个极点, 则

$$\log \frac{\frac{R}{2}}{|b - z_1|} \leqslant N\left(\frac{R}{2}, z_1, f\right) \leqslant T\left(\frac{R}{2}, z_1, f\right) < C_{q,\delta}.$$

故

---

1) 其中 $f(z_1) - a_1 \neq 0$ 是由于 $f(z) - a_1$ 以0为级 $\geqslant l_1 \geqslant 2$ 的重值, 且 $f'(z_1) \neq 0$ 的缘故.

$$|b - z_1| > \frac{R}{2e^{C_{q,\delta}}} > \frac{1}{4e^{C_{q,\delta}}}. \tag{5.2.8}$$

如果预先取 $\sigma = \dfrac{1}{16e^{C_{q,\delta}} + 1}$，则 $f(z)$ 在 $|z - z_1| \leqslant 4\sigma$ 上全纯. 由于 $4\sigma < \dfrac{1}{4} < \dfrac{R}{2}$，$|z - z_1| \leqslant 4\sigma$ 完全含于 $|z - z_1| < \dfrac{R}{2}$ 内. 因此

$$T(4\sigma, z_1, f) < C_{q,\delta}.$$

从而

$$\begin{aligned}&\log M(|z - z_1| \leqslant 2\sigma, f)\\&\quad \leqslant \frac{4\sigma + 2\sigma}{4\sigma - 2\sigma} T(4\sigma, z_1, f) < 3C_{q,\delta}.\end{aligned}$$

但是 $|z| \leqslant \sigma$ 完全含于 $|z - z_1| \leqslant 2\sigma$ 内，最后便有

$$\log M(|z| \leqslant \sigma, f) < 3C_{q,\delta}. \tag{5.2.9}$$

由引理5.2，我们有下述 A. Bloch 与 G. Valiron 的正规定则.

定理 5.4. 设$\mathscr{F}$为域D内的一个亚纯函数族. 若在D内，$\mathscr{F}$中的每个函数都以一组互相判别的复数 $a_\nu(\nu = 1, 2, \cdots, q)$作为级 $\geqslant l_\nu$ 的重值，并且

$$\sum_{\nu=1}^{q}\left(1 - \frac{1}{l_\nu}\right) > 2,$$

则$\mathscr{F}$在域D内为正规族.

5.2.3. 涉及重值的 Julia 型方向

为了获得相应的 Julia 型方向，我们先建立

引理 5.3. 设函数$f(z)$在$|z| < 1$内亚纯，以$a_\nu(\nu = 1, 2, \cdots, q)$为级 $\geqslant l_\nu(l_\nu \geqslant 2, \nu = 1, 2, \cdots, q)$的重值，并且由(5.2.3)表出的$\delta$为正值. 若(5.2.1)成立，则必存在仅依于$\delta$的数$\sigma$，$0 < \sigma < \dfrac{1}{2}$，使得对于任意复数$a$有

$$n\left(\frac{\sigma}{2}, f=a\right) < C_{q,\delta}\left\{1+\log\frac{1}{|f(z_0), a|}\right\}. \quad (5.2.10)$$

这里 z_0 为 $|z|<1$ 内的一点.

证. 按照引理 5.2,存在 σ 仅依于 q, δ, 使得在 $|z|\leqslant\sigma$ 内或者恒有 $|f(z)|>1$, 或者恒有 $|f(z)|<C_{q,\delta}$. 在圆 $|z|<\frac{\sigma}{10}$ 内, 取点 z_0 使得 $f(z_0)\neq 0, \infty$.

若在 $|z|\leqslant\sigma$ 上恒有 $|f(z)|>1$, 则

$$T\left(\frac{9}{10}\sigma, z_0, \frac{1}{f}\right)=0.$$

从而

$$T\left(\frac{9}{10}\sigma, z_0, f\right)=\log|f(z_0)|.$$

若在 $|z|\leqslant\sigma$ 上恒有 $|f(z)|<C_{q,\delta}$, 则

$$T\left(\frac{9}{10}\sigma, z_0, f\right)<C_{q,\delta}.$$

于是无论在那种情况都有

$$T\left(\frac{9}{10}\sigma, z_0, f\right)<\log^+|f(z_0)|+C_{q,\sigma}. \quad (5.2.11)$$

注意 $|z|\leqslant\frac{\sigma}{2}$ 含于 $|z-z_0|\leqslant\frac{6}{10}\sigma$ 内, 因此对于任意复数 a 有

$$\begin{aligned}n\left(\frac{\sigma}{2}, f=a\right) &\leqslant n\left(\frac{6}{10}\sigma, z_0, f=a\right)\\ &\leqslant\frac{1}{\log\dfrac{\frac{9}{10}\sigma}{\frac{6}{10}\sigma}}\int_{\frac{6}{10}\sigma}^{\frac{9}{10}\sigma}\frac{n(t, z_0, f=a)}{t}dt\\ &\leqslant\frac{1}{\log\frac{3}{2}}\left\{T\left(\frac{9}{10}\sigma, z_0, f\right)+\log^+|a|\right\}\end{aligned}$$

$$+ \log \frac{1}{|f(z_0) - a|} + \log 2 \Big\}$$

$$< C_{q,\delta} \left\{ 1 + \log \frac{1}{|f(z_0), a|} \right\}.$$

定理 5.5. 设函数 $f(z)$ 于开平面亚纯，适合条件

$$\overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{T(r, f)}{(\log r)^2} = \infty \qquad (5.2.12)$$

则存在从原点出发的半直线(J')，使得在以原点为顶点 J' 为平分角线的任意角域内，$f(z)$ 不可能以一组判别的复数 $a_\nu(\nu = 1, 2, \cdots, q)$ 为重级 $\geqslant l_\nu$ 的重值，其中 $l_\nu(\nu = 1, 2, \cdots, q)$ 为一组正整数适合条件

$$\sum_{\nu=1}^{q} \left(1 - \frac{1}{l_\nu}\right) > 2.$$

证. 由于 $f(z)$适合条件(5.2.12)，根据定理 3.6 必存在一列充满圆

$$\Gamma_j: |z - z_j| < \varepsilon_j |z_j| \qquad (j = 1, 2, \cdots),$$

使得在每个 Γ_j 内，$f(z)$取所有的复数至少 n_j 次，除去一些复数可含于半径为 δ_j 的两个球面小圆内，其中 ε_j, δ_j, $\frac{1}{n_j}$ 当 j 趋于 ∞ 时都趋向于 0.

作

$$\Gamma'_j: |z - z_j| < \frac{2}{\sigma} \varepsilon_j |z_j| \quad (j = 1, 2, \cdots),$$

其中 σ 为由引理 5.2 确定的正数.

在全体 $\Gamma'_j(j = 1, 2, \cdots)$ 上，我们将证明 $f(z)$不可能以一组判别的复数 $a_\nu(\nu = 1, 2, \cdots, q)$为重级 $\geqslant l_\nu$ 的重值，而且 l_ν 适合条件 $\sum_{\nu=1}^{q} \left(1 - \frac{1}{l_\nu}\right) > 2$.

事实上，如果上述论断不成立，对于每个固定的 j，置

$$\zeta = \frac{z - z_j}{\frac{2}{\sigma}\varepsilon_j|z_j|}, \quad F(\zeta) = f\left(z_j + \frac{2}{\sigma}\varepsilon_j|z_j|\zeta\right).$$

在 $|\zeta| < 1$ 内 $F(\zeta)$ 亚纯,适合引理 5.3 的条件. 从而

$$n\left(\frac{\sigma}{2}, F = a\right) < C_{q,\delta}\left\{1 + \log^+ \frac{1}{|F(z_0), a|}\right\}.$$

但是

$$n\left(\frac{\sigma}{2}, F = a\right) = n(\Gamma_j, f = a) \geqslant n_j,$$

至多除去半径为 δ_j 的两个球面小圆$(\gamma)_j$ 和$(\gamma)'_j$. 当 j 充分大时必存在复数 a_0 不属于$(\gamma)_j$ 和$(\gamma)'_j$,并使$|F(z_0), a_0| > \frac{1}{2}$. 于是

$$n_j < C_{q,\delta}(1 + \log 2).$$

这便推得一矛盾.

5.2.4. 结合于导数的情况

类似于定理 4.5 及其证明,我们可以建立

引理 5.4. 设在$|z| < R$ 内函数 $f(z)$全纯,且 $f(z)$的零点重级均 $\geqslant l$, $f^{(k)}(z) - 1$ 的零点重级均 $\geqslant p$, 其中 l, p 为两个正整数适合条件

$$\frac{k+1}{l} + \frac{1}{p} < 1. \tag{5.2.13}$$

若 $f(0) \neq 0$; $f^{(k)}(0) \neq 1$; $f^{(k+1)}(0) \neq 0$;则对于 $0<r<R$ 有

$$T(r, f) < C_k\left\{\log^+|f(0)| + \log^+|f^{(k)}(0)| + \log^+\frac{1}{|f^{(k+1)}(0)|} + \log^+ R + \log^+\frac{2}{R-r}\right\}. \tag{5.2.14}$$

引理 5.5. 设在$|z| < 1$ 内函数 $f(z)$ 全纯,且 $f(z)$ 的零点重级均 $\geqslant l$, $f^{(k)}(z) - 1$ 的零点重级均 $\geqslant p$, 其中正整数 l,p 适合(5.2.13),若在$|z| \leqslant \frac{1}{32}$ 上存在点 z_0 使 $|f(z_0)| < 1$, 则在 $|z|$

$\leqslant \frac{1}{32}$上一致地有$|f(z)| < C_k$.

引理 5.5 可以如同定理 4.6 得证. 只是在情况(1.2)时须注意到：在$|z| \leqslant \frac{1}{8}$上恒有$\sum_{j=0}^{k} |f^{(j)}(z)| > 1$以及$f(z)$的零点重级$\geqslant l > k+1$. 于是$f(z)$在$|z| \leqslant \frac{1}{8}$上没有零点，从而

$$N\left(r,\ z_2,\ \frac{1}{f}\right) = 0 \quad \left(0 < r < \frac{3}{32}\right).$$

由引理 5.5 我们立即有

定理 5.6. 设$\mathscr{F}$为域D内的一个全纯函数族. 若$\mathscr{F}$中每个函数$f(z)$在D内的零点重级均$\geqslant l$, $f^{(k)}(z)-1$的零点重级均$\geqslant p$，其中l, p为两个正整数且适合条件(5.2.13)，则$\mathscr{F}$在D内正规.

系. 设$\mathscr{F}$为域D内的一个全纯函数族. 若$\mathscr{F}$中每个函数$f(z)$在D内都有

$$f(z)^k f'(z) \neq \beta, \tag{5.2.15}$$

其中$k \geqslant 2$为一整数，β为一有穷非零复数，则$\mathscr{F}$在D内正规.

事实上考察$g(z) = \frac{f(z)^{k+1}}{k+1}$，$g(z)$的零点至少是 3 级，其导数$g'(z)$不取复数$\beta$. 所有的$g(z)$构成了域$D$内一个全纯函数族$G$. 由定理 5.6 可知$G$在$D$内正规，从而$\mathscr{F}$也是$D$内的正规族.

定理 5.6 及系是杨乐，张广厚[1] 1965 年获得的结果，系理的结论回答了 Hayman 提出的一个问题[4,问题5.12]. 但是当$k=1$时系理是否成立仍然是一个没有解决的问题.

杨乐，张广厚[1]还曾把定理 5.6 推广到较为一般的情况. 后来在这方面 D. Drasin[2]，顾永兴[1]都得到了有趣的结果. 他们还代替导数而考虑亚纯函数及其导数的线性组合，建立了相应的定理.

§ 5.3. 结合于导数与重值的辐角分布

在研究亚纯函数的辐角分布时，无论是引进导数或者重值都

是比较困难的．所以将这两者一并考虑时即成为难度很大的问题（参阅杨乐[3]）．

5.3.1．Valiron 型的界囿定理

我们先证明一个界囿定理，其中的原始值作了一些特殊的配合．

定理 5.7. 设函数 $f(z)$ 在 $|z|\leqslant R$ 上亚纯，l, p 为两个正整数适合条件

$$\frac{2}{l}+\frac{1}{p}<1. \tag{5.3.1}$$

若 $f(0)\neq 0,\infty$；$f'(0)\neq 0,1$；$f''(0)\neq 0$，则对于 $0<r<R$ 有

$$\begin{aligned}T(r,f)<\log^+|f(0)|+C\Big\{&\overline{N}(R,f)+\overline{N}_{l-1)}\Big(R,\frac{1}{f}\Big)\\&+\overline{N}_{p-1)}\Big(R,\frac{1}{f'-1}\Big)+\log^+\frac{1}{|f'(0)|}\\&+\log^+\left|\frac{f(0)}{f'(0)}\right|+\log^+\frac{1}{\left|\frac{f''(0)}{f'(0)}\right|}\\&+\log^+\log^+|f(0)|+\log\frac{2R}{R-r}\Big\}.\end{aligned} \tag{5.3.2}$$

证．不难看出，我们仅须对 $R=1$ 的情况作出证明．从恒等式

$$\frac{1}{f}=\frac{f'}{f}-\frac{f'-1}{f''}\cdot\frac{f''}{f}$$

出发有

$$\begin{aligned}m\Big(r,\frac{1}{f}\Big)\leqslant m\Big(r,\frac{f'}{f}\Big)&+m\Big(r,\frac{f'-1}{f''}\Big)\\&+m\Big(r,\frac{f''}{f}\Big)+\log 2.\end{aligned}$$

应用 Jensen-Nevanlinna 公式

$$m\Big(r,\frac{1}{f}\Big)=T(r,f)-N\Big(r,\frac{1}{f}\Big)+\log\frac{1}{|f(0)|},$$

$$m\left(r, \frac{f'-1}{f''}\right) = m\left(r, \frac{f''}{f'-1}\right)$$

$$+ \left\{N\left(r, \frac{f''}{f'-1}\right) - N\left(r, \frac{f'-1}{f''}\right)\right\}$$

$$+ \log\left|\frac{f'(0)-1}{f''(0)}\right| = m\left(r, \frac{f''}{f'-1}\right)$$

$$+ \left\{N(r, f'') + N\left(r, \frac{1}{f'-1}\right) - N(r, f')\right.$$

$$\left. - N\left(r, \frac{1}{f''}\right)\right\} + \log\left|\frac{f'(0)-1}{f''(0)}\right|.$$

于是

$$T(r, f) \leqslant \overline{N}(r, f) + N\left(r, \frac{1}{f}\right) + N\left(r, \frac{1}{f'-1}\right)$$

$$- N\left(r, \frac{1}{f''}\right) + S(r, f),$$

其中

$$S(r, f) = m\left(r, \frac{f'}{f}\right) + m\left(r, \frac{f''}{f}\right) + m\left(r, \frac{f''}{f'-1}\right)$$

$$+ \log\left|\frac{f(0)(f'(0)-1)}{f''(0)}\right| + \log 2.$$

即

$$T(r, f) \leqslant \overline{N}(r, f) + \overline{\overline{N}}\left(r, \frac{1}{f}\right) + \overline{N}\left(r, \frac{1}{f'-1}\right) + S(r, f). \tag{5.3.3}$$

现在我们对 $\overline{\overline{N}}\left(r, \frac{1}{f}\right)$ 中重级高的部分进行估计[1]，

$$\overline{\overline{N}}\left(r, \frac{1}{f}\right) = \overline{\overline{N}}_{l-1)}\left(r, \frac{1}{f}\right) + \overline{\overline{N}}_{(l}\left(r, \frac{1}{f}\right)$$

---

1) $\overline{\overline{N}}\left(r, \frac{1}{f}\right)$ 表 f 的零点密指量，其中重级大于 2 的零点均计两次，重级不大于 2 的按其重数计. $\overline{\overline{N}}_{(l}\left(r, \frac{1}{f}\right)$ 表重级大于 $l-1$ 的零点密指量，每个零点计两次，$\overline{\overline{N}}_{l-1)}\left(r, \frac{1}{f}\right)$ 表 $\overline{\overline{N}}\left(r, \frac{1}{f}\right) - \overline{\overline{N}}_{(l}\left(r, \frac{1}{f}\right)$.

$$\leqslant \overline{N}_{l-1)}\left(r, \frac{1}{f}\right)+\frac{2}{l} N_{(l}\left(r, \frac{1}{f}\right)$$

$$\leqslant\left(1-\frac{2}{l}\right) \overline{N}_{l-1)}\left(r, \frac{1}{f}\right)+\frac{2}{l} N\left(r, \frac{1}{f}\right)$$

$$\leqslant\left(1-\frac{2}{l}\right) \overline{N}_{l-1)}\left(r, \frac{1}{f}\right)+\frac{2}{l}\left\{T(r, f)+\log \frac{1}{|f(0)|}\right\}.$$

类似地

$$\overline{N}\left(r, \frac{1}{f'-1}\right)=\overline{N}_{p-1)}\left(r, \frac{1}{f'-1}\right)+\overline{N}_{(p}\left(r, \frac{1}{f'-1}\right)$$

$$\leqslant\left(1-\frac{1}{p}\right) \overline{N}_{p-1)}\left(r, \frac{1}{f'-1}\right)+\frac{1}{p} N\left(r, \frac{1}{f'-1}\right)$$

$$\leqslant\left(1-\frac{1}{p}\right) \overline{N}_{p-1)}\left(r, \frac{1}{f'-1}\right)+\frac{1}{p}\left\{T(r, f)\right.$$

$$+\overline{N}(r, f)+m\left(r, \frac{f'}{f}\right)+\log 2$$

$$\left.+\log \frac{1}{|f'(0)-1|}\right\}.$$

因此

$$\left(1-\frac{2}{l}-\frac{1}{p}\right) T(r, f) \leqslant\left(1+\frac{1}{p}\right) \overline{N}(r, f)$$

$$+\left(1-\frac{2}{l}\right) \overline{N}_{l-1)}\left(r, \frac{1}{f}\right)+\left(1-\frac{1}{p}\right) \overline{N}_{p-1)}$$

$$\times\left(r, \frac{1}{f'-1}\right)+Q_1(f)+Q_2(r, f). \tag{5.3.4}$$

这里

$$Q_1(f)=\left(1-\frac{2}{l}\right) \log |f(0)|+\left(1-\frac{1}{p}\right) \log |f'(0)-1|$$

$$+\log \frac{1}{\left|\frac{f''(0)}{f'(0)}\right|}+\log \frac{1}{|f'(0)|}=\left(1-\frac{2}{l}-\frac{1}{p}\right)$$

$$\times \log |f(0)|+\left(1-\frac{1}{p}\right) \log |f'(0)-1|$$

$$+\frac{1}{p}\log\left|\frac{f(0)}{f'(0)}\right|+\left(1-\frac{1}{p}\right)\log\frac{1}{|f'(0)|}$$

$$+\log\frac{1}{\left|\frac{f''(0)}{f'(0)}\right|},\tag{5.3.5}$$

$$Q_2(r,f)=\left(1+\frac{1}{p}\right)m\left(r,\frac{f'}{f}\right)+m\left(r,\frac{f''}{f}\right)$$

$$+m\left(r,\frac{f''}{f'-1}\right)+2\log 2.\tag{5.3.6}$$

根据 Nevanlinna 引理,对于 $0<r<\rho<1$ 有

$$\left(1+\frac{1}{p}\right)m\left(r,\frac{f'}{f}\right)\leqslant 2m\left(r,\frac{f'}{f}\right)$$

$$<C\left\{1+\log^+\log^+\frac{1}{|f(0)|}+\log^+\frac{1}{r}+\log^+\frac{1}{\rho-r}\right.$$

$$\left.+\log^+T(\rho,f)\right\}.$$

$$m\left(r,\frac{f''}{f}\right)<C\left\{1+\log^+\log^+\frac{1}{|f(0)|}+\log^+\frac{1}{r}\right.$$

$$\left.+\log^+\frac{1}{\rho-r}+\log^+T(\rho,f)\right\}.$$

对于项 $m\left(r,\frac{f''}{f'-1}\right)$,取 $\rho'=\frac{\rho+r}{2}$,则

$$m\left(r,\frac{f''}{f'-1}\right)<C\left\{1+\log^+\log^+\frac{1}{|f'(0)-1|}\right.$$

$$\left.+\log^+\frac{1}{r}+\log^+\frac{1}{\rho'-r}+\log^+T(\rho',f'-1)\right\}.$$

但是

$$C\log^+T(\rho',f')$$

$$\leqslant C\log^+\left\{2T(\rho',f)+m\left(\rho',\frac{f'}{f}\right)\right\}$$

$$\leqslant C\log^{+}T(\rho,f)+m\left(\rho',\frac{f'}{f}\right)+C,$$

对于项 $m\left(\rho',\frac{f'}{f}\right)$ 再应用 Nevanlinna 引理，经整理后有

$$m\left(r,\frac{f''}{f'-1}\right)<C\left\{1+\log^{+}\log^{+}\frac{1}{|f(0)|}\right.$$

$$+\log^{+}\log^{+}\frac{1}{|f'(0)-1|}+\log^{+}\frac{1}{r}$$

$$\left.+\log^{+}\frac{1}{\rho-r}+\log^{+}T(\rho,f)\right\}.$$

因此

$$Q_{2}(r,f)<C\left\{1+\log^{+}\log^{+}\frac{1}{|f(0)|}\right.$$

$$+\log^{+}\log^{+}\frac{1}{|f'(0)-1|}+\log^{+}\frac{1}{r}$$

$$\left.+\log^{+}\frac{1}{\rho-r}+\log^{+}T(\rho,f)\right\}.$$

将这些估计式代入(5.3.4)，(5.3.5)与(5.3.6)，并计及

$$\left(1-\frac{1}{p}\right)\log|f'(0)-1|+C\log^{+}\log^{+}\frac{1}{|f'(0)-1|}$$

$$+\left(1-\frac{1}{p}\right)\log\frac{1}{|f'(0)|}\leqslant\left(1-\frac{1}{p}\right)\{\log^{+}|f'(0)|+C\}$$

$$+\left(1-\frac{1}{p}\right)\log\frac{1}{|f'(0)|}\leqslant\left(1-\frac{1}{p}\right)\log^{+}\frac{1}{|f'(0)|}+C,$$

得
$$\left(1-\frac{2}{l}-\frac{1}{p}\right)\left(T(r,f)+\log\frac{1}{|f(0)|}\right)$$

$$<H+C\log^{+}T(\rho,f)+C\log^{+}\frac{2}{\rho-r},\qquad(5.3.7)$$

其中
$$H=\left(1+\frac{1}{p}\right)\overline{N}(1,f)+\left(1-\frac{2}{l}\right)\overline{\overline{N}}_{l-1)}\left(1,\frac{1}{f}\right)$$

$$+\left(1-\frac{1}{p}\right)\bar{N}_{(p-1)}\left(1,\frac{1}{f'-1}\right)+\left(1-\frac{1}{p}\right)$$

$$\times\log^+\frac{1}{|f'(0)|}+\frac{1}{p}\log^+\left|\frac{f(0)}{f'(0)}\right|+\log^+\frac{1}{\left|\frac{f''(0)}{f'(0)}\right|}$$

$$+C\left\{1+\log^+\log^+\frac{1}{|f(0)|}+\log^+\frac{1}{r}\right\}.$$

根据引理 1.4 与 $\int_r^{\frac{7+r}{8}}\frac{dt}{1-t}>2$，在 $\left[r,\frac{7+r}{8}\right]$ 上必存在 r' 使

$$T\left(r'+\frac{1-r'}{eT(r',f)},f\right)<2T(r',f).$$

取

$$\rho=r'+\frac{1-r'}{eT(r',f)},$$

则

$$\log^+T(\rho,f)<\log^+T(r',f)+\log 2. \tag{5.3.8}$$

$$\log\frac{2}{\rho-r'}\leqslant\log 2+1+\log^+T(r',f)+\log\frac{1}{1-r'}$$

$$\leqslant 4\log 2+1+\log^+T(r',f)+\log\frac{1}{1-r}. \tag{5.3.9}$$

当(5.3.1)满足时可以看出有

$$1-\frac{2}{l}-\frac{1}{p}\geqslant\frac{1}{12}.$$

对 $0<r'<\rho<1$ 应用(5.3.7)并计及(5.3.8)与(5.3.9)有

$$\frac{T\left(r',\frac{1}{f}\right)}{12}<H+C\log^+T\left(r',\frac{1}{f}\right)$$

$$+C\log^+\log^+|f(0)|+C\log\frac{2}{1-r}.$$

再注意到

$$C\log^+T\left(r',\frac{1}{f}\right)<\frac{1}{24}T\left(r',\frac{1}{f}\right)+C,$$

可得

$$\frac{1}{24}T\left(r,\frac{1}{f}\right)\leqslant\frac{1}{24}T\left(r',\frac{1}{f}\right)$$

$$<H+C+C\log\frac{1}{1-r}+C\log^+\log^+|f(0)|.$$

因此

$$T(r,f)<\log|f(0)|+C\log^+\log^+|f(0)|$$

$$+C\left\{\overline{N}(1,f)+\overline{N}_{l-1)}\left(1,\frac{1}{f}\right)+\overline{N}_{p-1)}\left(1,\frac{1}{f'-1}\right)\right.$$

$$+\log^+\frac{1}{|f'(0)|}+\log^+\left|\frac{f(0)}{f'(0)}\right|+\log^+\left|\frac{f'(0)}{f''(0)}\right|$$

$$\left.+\log^+\log^+\frac{1}{|f(0)|}+\log^+\frac{1}{r}+\log^+\frac{2}{1-r}\right\}.$$

由

$$\log|f(0)|+C\log^+\log^+\frac{1}{|f(0)|}<\log^+|f(0)|+C$$

以及当 $r\geqslant\frac{1}{2}$ 时有 $\log^+\frac{1}{r}\leqslant\log 2$，于是对于 $r\geqslant\frac{1}{2}$ 便得到(5.3.2). 当 $r<\frac{1}{2}$ 时只须注意 $T(r,f)\leqslant T\left(\frac{1}{2},f\right)$，也得(5.3.2).

5.3.2. 基本定理

定理 5.8. 设函数 $f(z)$ 于 $|z|<1$ 全纯，l, p 为两个正整数适合条件 $\frac{2}{l}+\frac{1}{p}<1$. 若

$$n_{l-1)}\left(1,\frac{1}{f}\right)+n_{p-1)}\left(1,\frac{1}{f'-1}\right)<N, \tag{5.3.10}$$

则对于任意复数 a 有

$$n\left(\frac{1}{32}, \frac{1}{f-a}\right) < C\left\{N + \log\frac{1}{|f(z^*), a|} + \log^+\log^+|f(z^*)|\right\}, \tag{5.3.11}$$

其中 z^* 为 $|z|<1$ 内的一点.

证. 设在 $|z|<1$ 内 $f(z)$ 的重级小于 l 的零点为 $a_\mu\left(\mu=1, 2, \cdots, n_{l-1)}\left(1, \frac{1}{f}\right)\right)$, $f'(z)-1$ 的重级小于 p 的零点为 $\beta_\nu\left(\nu=1, 2, \cdots, n_{p-1)}\left(1, \frac{1}{f'-1}\right)\right)$. 取 $h=\frac{1}{1024e}$, 根据 Boutroux-Cartan 定理对于任意复数 z 有

$$\prod_{\mu=1}^{n_{l-1)}\left(1,\frac{1}{f}\right)} |z-a_\mu| > h^{n_{l-1)}\left(1,\frac{1}{f}\right)},$$

$$\prod_{\nu=1}^{n_{p-1)}\left(1,\frac{1}{f'-1}\right)} |z-\beta_\nu| > h^{n_{p-1)}\left(1,\frac{1}{f'-1}\right)},$$

至多除去有限个小圆,其半径总和不超过 $4eh=\frac{1}{256}$. 这些小圆的全体记为(γ).

区分两种情况.

(i) 在 $|z|\leqslant\frac{1}{16}$ 上且在(γ)外恒有 $|f(z)|\leqslant e^2$.

显然在圆环 $\frac{3}{64}\leqslant|z|\leqslant\frac{1}{16}$ 上存在圆周 $|z|=\rho$ 与(γ)无公共点. 于是

$$m(\rho, f)\leqslant 2.$$

从而对于任意复数 a 有

$$n\left(\frac{1}{32}, \frac{1}{f-a}\right) \leqslant \frac{1}{\log \frac{3/64}{1/32}} N\left(\frac{3}{64}, \frac{1}{f-a}\right)$$

$$\leqslant \frac{1}{\log \frac{3}{2}} N\left(\rho, \frac{1}{f-a}\right)$$

$$\leqslant \frac{1}{\log \frac{3}{2}} \left\{T(\rho, f) + \log^{+}|a| + \log 2\right.$$

$$\left. + \log \frac{1}{|f(0)-a|}\right\}$$

$$< C\left(1 + \log \frac{1}{|f(0), a|}\right). \tag{5.3.12}$$

(2) 在$|z| \leqslant \frac{1}{16}$上且在$(\gamma)$外存在点 z_1 使$|f(z_1)| > e^2$.

在圆环$\frac{5}{16} \leqslant |z - z_1| \leqslant \frac{3}{8}$上存在圆周$|z| = \rho_1$与$(\gamma)$无公共点. 设$\zeta$为 $|z - z_1| = \rho_1$ 上的一点使

$$|f(\zeta)| = \max_{|z-z_1|=\rho_1} |f(z)|.$$

以直线段连结点 z_1 与 ζ，遇(γ)中的圆则以相应的弧段替代相交部分，这样得一曲线段 L，L的长度小于 1.

再区分两种情况.

(2.1) $\left|\frac{f'(z_1)}{f(z_1)}\right| \geqslant 1.$

这时又分为两种情况.

(2.1.1) 在L上一致地有$\left|\frac{f''(z)}{f'(z)}\right| \leqslant 1.$

对于$(\log f'(z))'$,沿着L从 z_1 积分到点z可得

$$|\log f'(z) - \log f'(z_1)| \leqslant \left|\int_{L_{z_1,z}} \frac{f''(t)}{f'(t)} dt\right| < 1.$$

从而

$$\frac{|f'(z_1)|}{e} < |f'(z)| < e|f'(z_1)|.$$

故

$$\begin{aligned}|f(\zeta)| &\leqslant |f(z_1)| + \left|\int_L f'(t)dt\right| \\ &\leqslant |f(z_1)| + e|f'(z_1)| \\ &= |f(z_1)|\left\{1 + e\left|\frac{f'(z_1)}{f(z_1)}\right|\right\}.\end{aligned}$$

因此

$$m(\rho_1, z_1, f) \leqslant \log^+|f(z_1)| + \log^+\left|\frac{f'(z_1)}{f(z_1)}\right| + 2. \quad (5.3.13)$$

现在我们来寻求 $\log^+\left|\frac{f'(z_1)}{f(z_1)}\right|$ 一个适当的上界．对于任意正数 r，$r < \frac{1}{2}$，有

$$\begin{aligned}\log^+\left|\frac{f'(z_1)}{f(z_1)}\right| &\leqslant T\left(r, z_1, \frac{f'}{f}\right) \\ &= m\left(r, z_1, \frac{f'}{f}\right) + \overline{N}\left(r, z_1, \frac{1}{f}\right) \\ &= m\left(r, z_1, \frac{f'}{f}\right) + \overline{N}_{l-1)}\left(r, z_1, \frac{1}{f}\right) \\ &\quad + \overline{N}_{(l}\left(r, z_1, \frac{1}{f}\right). \quad (5.3.14)\end{aligned}$$

由于 $z_1 \overline{\in} (\gamma)$，

$$\prod_{\mu=1}^{n_{l-1)}\left(1,\frac{1}{f}\right)} |z_1 - \alpha_\mu| > h^{n_{l-1)}\left(1,\frac{1}{f}\right)}.$$

设 $\alpha_\mu(\mu = 1,2,\cdots,n_1)$为 $f(z)$ 位于$|z - z_1| \leqslant r$ 上级小于 l 的零点，

$$2^{n_{l-1)}\left(1,\frac{1}{f}\right)-n_1} \prod_{\mu=1}^{n_1} |z_1 - \alpha_\mu| > h^{n_{l-1)}\left(1,\frac{1}{f}\right)}.$$

于是

$$\prod_{\mu=1}^{n_1} |z_1 - a_\mu| > \left(\frac{h}{2}\right)^{n_{l-1)}\left(1, \frac{1}{f}\right)} > \left(\frac{h}{2}\right)^N,$$

故

$$N_{l-1)}\left(r, z_1, \frac{1}{f}\right) < N \log \frac{2}{h}. \tag{5.3.15}$$

对于 $\bar{N}_{(l}\left(r, z_1, \frac{1}{f}\right)$ 有

$$\bar{N}_{(l}\left(r, z_1, \frac{1}{f}\right) \leqslant \frac{1}{l}\left\{T(r, z_1, f) + \log \frac{1}{|f(z_1)|}\right\}. \tag{5.3.16}$$

再取 $r = \frac{1}{8}$, $\rho = \frac{1}{4}$, 应用 Nevanlinna 引理并计及 $|f(z_1)| > e^2$ 则

$$m\left(\frac{1}{8}, z_1, \frac{f'}{f}\right) < C\left\{1 + \log^+ T\left(\frac{1}{4}, z_1, f\right)\right\}. \tag{5.3.17}$$

将(5.3.15),(5.3.16),(5.3.17)代入(5.3.14),然后把所得的结果代入(5.3.13)有

$$\left(1 - \frac{1}{l}\right)T(\rho_1, z_1, f) < \left(1 - \frac{1}{l}\right)\log |f(z_1)|$$
$$+ C\left\{N + \log^+ T\left(\frac{1}{4}, z_1, f\right)\right\}.$$

即

$$\left(1 - \frac{1}{l}\right)T\left(\rho_1, z_1, \frac{1}{f}\right)$$
$$< C\left\{N + \log^+ T\left(\frac{1}{4}, z_1, \frac{1}{f}\right) + \log^+ \log^+ |f(z_1)|\right\}.$$

注意 $l \geqslant 3$ 以及

$$C \log^+ T\left(\frac{1}{4}, z_1, \frac{1}{f}\right) \leqslant \frac{1}{3} T\left(\frac{1}{4}, z_1, \frac{1}{f}\right) + C,$$

因此

$$T\left(\rho_1, z_1, \frac{1}{f}\right) < C\{N + \log^+ \log^+ |f(z_1)|\}.$$

故

$$T(\rho_1, z_1, f) < \log|f(z_1)| + C\{N + \log^+\log^+|f(z_1)|\}.$$

对于任意复数 a

$$n\left(\frac{1}{4}, z_1, \frac{1}{f-a}\right) \leqslant \frac{1}{\log\dfrac{\frac{5}{16}}{\frac{1}{4}}} N\left(\frac{5}{16}, z_1, \frac{1}{f-a}\right)$$

$$\leqslant \frac{1}{\log\frac{5}{4}} N\left(\rho_1, z_1, \frac{1}{f-a}\right)$$

$$\leqslant \frac{1}{\log\frac{5}{4}}\left\{T(\rho_1, z_1, f) + \log^+|a| + \log 2\right.$$

$$\left. + \log\frac{1}{|f(z_1)-a|}\right\}$$

$$< C\left\{N + \log\frac{1}{|f(z_1), a|} + \log^+\log^+|f(z_1)|\right\}.$$

但是$|z| \leqslant \frac{1}{8}$含于$|z - z_1| \leqslant \frac{1}{4}$内，于是

$$n\left(\frac{1}{8}, \frac{1}{f-a}\right) < C\left\{N + \log\frac{1}{|f(z_1), a|}\right.$$

$$\left. + \log^+\log^+|f(z_1)|\right\}. \tag{5.3.18}$$

(2.1.2) 在 L 上从 z_1 走向 ζ 使 $\left|\frac{f''(z)}{f'(z)}\right| \leqslant 1$不成立的点的下确界为 z_2. 当 L 上一致有 $\left|\frac{f''(z)}{f'(z)}\right| > 1$ 时，则取 $z_2 = z_1$.

如同情况(2.1.1)有

$$\frac{|f'(z_1)|}{e} < |f'(z_2)| < e|f'(z_1)|$$

与

$$|f(z_2)| < |f(z_1)| + e|f'(z_1)|.$$

由 $|z_2| \leqslant |\zeta| \leqslant \frac{1}{16} + \frac{3}{8} = \frac{7}{16}$，故 $f(z)$ 在 $|z - z_2| \leqslant \frac{9}{16}$ 上全纯．为了对它应用定理 5.7，我们首先注意到

$$\bar{N}_{l-1)}\left(\frac{9}{16}, z_2, \frac{1}{f}\right) + \bar{N}_{p-1)}\left(\frac{9}{16}, z_2, \frac{1}{f' - 1}\right) < N \log \frac{2}{h}$$

与

$$\left|\frac{f'(z_2)}{f''(z_2)}\right| \leqslant 1.$$

对于项 $\log^+ \frac{1}{|f'(z_2)|}$ 与 $\log^+ \left|\frac{f(z_2)}{f'(z_2)}\right|$，分别利用

$$|f'(z_2)| > \frac{|f'(z_1)|}{e} \geqslant \frac{|f(z_1)|}{e} > e$$

与

$$\left|\frac{f(z_2)}{f'(z_2)}\right| < \frac{|f(z_1)| + e|f'(z_1)|}{\frac{|f'(z_1)|}{e}} \leqslant e + e^2.$$

注意 z_2 位于 (γ) 外，所以它不是 $f(z)$ 的单级零点；由 $f'(z_2) \neq 0$，它也不是 $f(z)$ 的重级零点．于是 $f(z_2) \neq 0, \infty$；$f'(z_2) \neq 1$；$f''(z_2) \neq 0$．应用定理 5.7，对于 $0 < r < \frac{9}{16}$ 有

$$T(r, z_2, f) < \log^+ |f(z_2)| + C\left\{N + \log^+\log^+ |f(z_2)| + \log \frac{2}{\frac{9}{16} - r}\right\},$$

于是

$$n\left(\frac{34}{64}, z_2, \frac{1}{f - a}\right) \leqslant \frac{1}{\log \frac{\frac{35}{64}}{\frac{34}{64}}} N\left(\frac{35}{64}, z_2, \frac{1}{f - a}\right)$$

$$< C\left\{N+\log\frac{1}{|f(z_2),a|}+\log^+\log^+|f(z_2)|\right\}.$$

但是 $|z|\leqslant\frac{1}{16}$ 含于 $|z-z_2|\leqslant\frac{34}{64}$ 内，从而

$$n\left(\frac{1}{16},\frac{1}{f-a}\right)< C\left\{N+\log\frac{1}{|f(z_2),a|}+\log^+\log^+|f(z_2)|\right\}. \tag{5.3.19}$$

(2.2) $\left|\frac{f'(z_1)}{f(z_1)}\right|<1$.

这时又区分两种情况.

(2.2.1) 在 L 上一致有 $\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right|\leqslant 1$.

对于这种情况，立即得

$$|\log f(\zeta)-\log f(z_1)|<1.$$

因此

$$m(\rho_1,z_1,f)<\log^+|f(z_1)|+1.$$

从而

$$\begin{aligned}n\left(\frac{1}{8},\frac{1}{f-a}\right)&\leqslant n\left(\frac{1}{4},z_1,\frac{1}{f-a}\right)\\&\leqslant\frac{1}{\log\frac{\frac{5}{16}}{\frac{1}{4}}}N\left(\frac{5}{16},z_1,\frac{1}{f-a}\right)\\&\leqslant\frac{1}{\log\frac{5}{4}}N\left(\rho_1,z_1,\frac{1}{f-a}\right)\\&< C\left\{1+\log\frac{1}{|f(z_1),a|}\right\}.\end{aligned}\tag{5.3.20}$$

(2.2.2) 在 L 上从 z_1 向 ζ 移动时使 $\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right| \leqslant 1$不成立的点的下确界为 z_3.

这时有

$$|f'(z_3)| = |f(z_3)|$$

以及

$$|\log f(z_3) - \log f(z_1)| < 1.$$

后者即

$$\frac{|f(z_1)|}{e} < |f(z_3)| < e|f(z_1)|.$$

再区分两种情况.

(2.2.2.1) 在 L 上从 z_3 至 ζ 一致有 $\left|\frac{f''(z)}{f'(z)}\right| \leqslant 1.$

这时对于 L 上 z_3 与 ζ 间的任意点 z 有

$$|\log f'(z) - \log f'(z_3)| \leqslant 1.$$

故

$$|f'(z)| \leqslant e|f'(z_3)|.$$

于是

$$\begin{aligned}|f(\zeta)| &\leqslant |f(z_3)| + \left|\int_{L_{z_3\zeta}} f'(z)dz\right| \\ &\leqslant |f(z_3)| + e|f'(z_3)| \\ &= |f(z_3)|(1+e) < |f(z_1)|e(1+e).\end{aligned}$$

从而

$$m(\rho_1, z_1, f) < \log^+|f(z_1)| + C.$$

因此

$$\begin{aligned}n\left(\frac{1}{8}, \frac{1}{f-a}\right) &\leqslant n\left(\frac{1}{4}, z_1, \frac{1}{f-a}\right) \\ &\leqslant \frac{1}{\log\frac{\frac{5}{16}}{\frac{1}{4}}} N\left(\frac{5}{16}, z_1, \frac{1}{f-a}\right)\end{aligned}$$

$$< C\left\{1+\log\frac{1}{|f(z_1),a|}\right\}. \tag{5.3.21}$$

(2.2.2.2) 在 L 上从 z_3 向 ζ 移动时使 $\left|\frac{f''(z)}{f'(z)}\right|\leqslant 1$ 不成立的点的下确界为 z_4。

这时有

$$\frac{|f'(z_3)|}{e}\leqslant|f'(z_4)|\leqslant e|f'(z_3)|$$

以及

$$|f(z_4)|\leqslant|f(z_3)|+e|f'(z_3)|<|f(z_1)|e(e+1).$$

由 $|z_4|\leqslant|\zeta|\leqslant\frac{1}{16}+\frac{3}{8}=\frac{7}{16}$, $f(z)$在 $|z-z_4|\leqslant\frac{9}{16}$ 上全纯,并且

$$N_{(l-1)}\left(\frac{9}{16},z_4,\frac{1}{f}\right)+N_{(p-1)}\left(\frac{9}{16},z_4,\frac{1}{f'-1}\right)<N\log\frac{2}{h}.$$

为了应用定理 5.7,我们再注意

$$|f'(z_4)|\geqslant\frac{|f'(z_3)|}{e}=\frac{|f(z_3)|}{e}>\frac{|f(z_1)|}{e^2}>1,$$

$$\left|\frac{f(z_4)}{f'(z_4)}\right|\leqslant\frac{|f(z_3)|+e|f'(z_3)|}{\frac{|f'(z_3)|}{e}}\leqslant e+e^2,$$

以及

$$\left|\frac{f''(z_4)}{f'(z_4)}\right|=1.$$

由以上诸式与 $z_4\bar{\in}(\gamma)$还有 $f(z_4)\neq 0,\infty$; $f'(z_4)\neq 1$, $f''(z_4)\neq 0$。于是根据定理 5.7 对于 $0<r<\frac{9}{16}$ 有

$$T(r,z_4,f)<\log^+|f(z_4)|$$
$$+C\left\{N+\log^+\log^+|f(z_4)|\right\}.$$

因此对于任意复数 a 有

$$n\left(\frac{1}{16}, \frac{1}{f-a}\right) \leqslant n\left(\frac{34}{64}, z_4, \frac{1}{f-a}\right)$$

$$\leqslant \frac{1}{\log \frac{\frac{35}{64}}{\frac{34}{64}}} N\left(\frac{35}{64}, z_4, \frac{1}{f-a}\right)$$

$$< C\left\{N + \log \frac{1}{|f(z_4), a|} + \log^+ \log^+ |f(z_4)|\right\}. \qquad (5.3.22)$$

5.3.3. 应用

如同定理 4.9 的推理步骤，我们应用定理 5.8 可以证明

定理 5.9. 设 $f(z)$ 为一整函数，级 λ 为有穷正数，则必存在从原点发出的一条半直线 $B: \arg z = \theta_0 (0 \leqslant \theta_0 < 2\pi)$ 具有下述性质：若 l, p 为两个正整数适合条件 $\frac{2}{l} + \frac{1}{p} < 1$，则对于任意正数 ε 和一切有穷复数 α 与有穷非零复数 β 有

$$\overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{\log\left\{n_{l-1)}\left(r, \theta_0, \varepsilon, \frac{1}{f-\alpha}\right) + n_{p-1)}\left(r, \theta_0, \varepsilon, \frac{1}{f'-\beta}\right)\right\}}{\log r} = \lambda. \qquad (5.3.23)$$

系. 设 $f(z)$ 为一整函数，级 λ 为有穷正数，则存在从原点出发的半直线 $B: \arg z = \theta_0 (0 \leqslant \theta_0 < 2\pi)$ 具有下述性质：对大于 1 的整数 k，任意正数 ε 和每个有穷非零复数 β 有

$$\overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{\log n(r, \theta_0, \varepsilon, f'f^k = \beta)}{\log r} = \lambda. \qquad (5.3.24)$$

事实上在定理 5.9 中，我们可以证明凡是 $f(z)$ 的一条 Borel 方向 $B: \arg z = \theta_0$ 必定同时具有(5.3.23)式所要求的性质. 对任意正整数 k，$f(z)$ 的 Borel 方向 B 也是 $F(z) = \frac{(f(z))^{k+1}}{k+1}$ 的 Borel

方向，因此 B 对于函数 $F(z)$ 也满足定理 5.9 的结论。

但是 $F(z)$ 没有重级小于 $k+1$ 的零点，即

$$n_{k)}(r, \theta_0, \varepsilon, F=0) \equiv 0.$$

而当 $k>1$ 时有 $\frac{2}{k+1}+\frac{1}{4}<1$，因此由(5.3.23)

$$\varlimsup_{r\to\infty} \frac{\log n_{3)}(r, \theta_0, \varepsilon, F'=\beta)}{\log r}=\lambda$$

对于任意有穷非零复数 β 成立．从而更有(5.3.24)．

对于有穷正级整函数，如果仅涉及重值而不引进导数，则其辐角分布的问题也可以用类似于本节里的原则解决，而且要简单得多．但是对于亚纯函数，要考虑涉及重值的辐角分布问题，在没有引进导数时仅能用几何方法解决．这时有（参阅 Tsuji[1]）．

定理 5.10. 设 $f(z)$ 为一亚纯函数，级 λ 为有穷正数，则必存在从原点发出的一条半直线 $B: \arg z=\theta_0 (0\leqslant\theta_0<2\pi)$ 具有下述性质：对于任意一组互相判别的复数 $a_\nu (\nu=1,2,\cdots,q)$，任意一组整数 $l_\nu\geqslant 2 (\nu=1,2,\cdots,q)$ 与任意正数 ε，若 $\sum_{\nu=1}^{q}\left(1-\frac{1}{l_\nu}\right)>2$，则

$$\varlimsup_{r\to\infty}\frac{\log\left(\sum_{\nu=1}^{q} n_{l_\nu-1)}(r, \theta_0, \varepsilon, f=a_\nu)\right)}{\log r}=\lambda. \qquad (5.3.25)$$

对于有穷正级亚纯函数，同时涉及导数与重值的辐角分布问题，除去在特殊情况(例如以∞为 Borel 例外值)，尚未获得彻底解决。

定理 5.8 的证明较为复杂，但是具有一定的普遍性．例如用类似的方法可以证明定理 5.9 中当 α，β 易为级小于 λ 的整函数 $\alpha(z)$，$\beta(z)$ $(\beta'(z)\not\equiv\alpha(z))$ 时结论依然成立。

第六章　Borel 方向的一些新研究

近年来关于亚纯函数的 Borel 方向有一些深入的研究，本章将着重论述两个问题：(1) 亚纯函数的 Borel 方向的分布；(2) 亚纯函数及其导数的 Borel 方向之间的关系.

§6.1. 亚纯函数的 Borel 方向的分布

6.1.1. 问题的提出和几个引理

在第三章里我们知道，对于开平面亚纯的函数$f(z)$，若其级为$\lambda(0<\lambda<\infty)$，则至少存在一条从原点出发的半直线 B: $\arg z=\theta_0$ $(0\leqslant\theta_0<2\pi)$ 使得

$$\varlimsup_{r\to\infty}\frac{\log n(r,\theta_0,\varepsilon,f=a)}{\log r}=\lambda$$

对所有的复数 a 与任意正数 ε 恒能成立，至多除去关于 a 的两个复数.

可以看出，若 $\arg z=\theta_j(j=1,2,\cdots)$ 为 $f(z)$的一列 λ 级 Borel 方向，且$\lim\limits_{j\to\infty}\theta_j=\theta_0$，则 $\arg z=\theta_0$ 亦必为 $f(z)$的 λ 级 Borel 方向. 于是 $f(z)$的全体 Borel 方向与单位圆周的交点构成了该圆周上一个非空的、闭的点集. 这样自然就产生了以下问题：

在单位圆周上任给一个非空的、闭的点集E以及一个有穷正数 λ，是否存在级为 λ 的亚纯函数 $f(z)$，它的全体 Borel 方向恰好和从原点O连结E中各点的方向重合?

1976 年杨乐和张广厚[5]对这个问题作了肯定的回答. 为了证明他们的结果，我们先建立几个引理.

引理 6.1. 若 a,b 为两个复数，且$|a|<1$，$|b|<1$，则

$$\left|\frac{a+b}{1+\bar{a}b}\right| \leqslant \frac{|a|+|b|}{1+|a||b|}. \tag{6.1.1}$$

证. 由

$$\left(\frac{1+|a||b|}{|a|+|b|}\right)^2 - 1$$

$$= \frac{(1+|a||b|+|a|+|b|)(1+|a||b|-|a|-|b|)}{(|a|+|b|)^2}$$

$$\leqslant \frac{(1-|a|^2)(1-|b|^2)}{|a+b|^2}$$

$$= \frac{(1+\bar{a}b)(1+a\bar{b})-(a+b)(\bar{a}+\bar{b})}{(a+b)(\bar{a}+\bar{b})}$$

$$= \left|\frac{1+\bar{a}b}{a+b}\right|^2 - 1,$$

立即有(6.1.1).

引理 6.2. 若 $g(z)$在$|z| \leqslant R(0<R<\infty)$上亚纯，且 $g(0) \neq 0,\infty$,则对于点 $z=re^{i\theta}$ 以及 ρ, $r<\rho\leqslant R$, 有

$$\log^+\left|\frac{g'(z)}{g(z)}\right| \leqslant 5\log 2 + \log^+\rho + 3\log^+\frac{1}{\rho-r} + \log^+\mathfrak{N}$$

$$+ \log^+\frac{1}{\delta(z)} + \log^+T(\rho,g) + \log^+\log^+\frac{1}{|g(0)|}, \tag{6.1.2}$$

其中 $\mathfrak{N} = n(\rho,g) + n\left(\rho,\frac{1}{g}\right)$, $\delta(z)$ 为点 z 与 $g(z)$在 $|z|\leqslant\rho$ 内所有零点和极点的距离的下界.

证. 由 Poisson-Jensen 公式，当$|z|\leqslant r<R$ 时有

$$\log g(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|g(\rho e^{i\varphi})|\frac{\rho e^{i\varphi}+z}{\rho e^{i\varphi}-z}d\varphi$$

$$-\sum_j \log\frac{\rho^2-\bar{a}_j z}{\rho(z-a_j)} + \sum_k \log\frac{\rho^2-\bar{b}_k z}{\rho(z-b_k)} + iC.$$

这里 a_j,b_k 分别为 $|z|\leqslant\rho$上 $g(z)$的零点与极点.

取导数则

$$\frac{g'(t)}{g(t)}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|g(\rho e^{i\varphi})|\frac{2\rho e^{i\varphi}}{(\rho e^{i\varphi}-t)^2}d\varphi$$

$$+\sum_j\left(\frac{\bar{a}_j}{\rho^2-\bar{a}_jt}-\frac{1}{a_j-t}\right)-\sum_k\left(\frac{\bar{b}_k}{\rho^2-\bar{b}_kt}-\frac{1}{b_k-t}\right).$$

由于 $|t-a_j|\geqslant\delta(t)$, $|t-b_k|\geqslant\delta(t)$, 于是

$$\left|\frac{g'(t)}{g(t)}\right|\leqslant\frac{2\rho}{(\rho-r)^2}\left\{m(\rho,g)+m\left(\rho,\frac{1}{g}\right)\right\}$$

$$+\mathfrak{N}\left(\frac{1}{\rho-r}+\frac{1}{\delta(t)}\right)\leqslant\frac{4\rho}{(\rho-r)^2}\left\{T(\rho,g)\right.$$

$$\left.+\log^+\frac{1}{|g(0)|}\right\}+\mathfrak{N}\left(\frac{1}{\rho-r}+\frac{1}{\delta(t)}\right).$$

两边取正对数并进行整理后即得(6.1.2).

在引理 6.2 中,当 $g(0)=\infty$时,记 $g(z)=\frac{c_\tau g_1(z)}{z^\tau}$,其中 τ 为一正整数, $g_1(0)=1$, 则

$$\frac{g'(z)}{g(z)}=\frac{g_1'(z)}{g_1(z)}-\frac{\tau}{z},$$

从而

$$\log^+\left|\frac{g'(t)}{g(t)}\right|\leqslant\log^+\left|\frac{g_1'(t)}{g_1(t)}\right|+\log^+\frac{\tau}{r}+\log 2.$$

对于上述不等式右端的第一项应用(6.1.2),则可得

$$\log^+\left|\frac{g'(t)}{g(t)}\right|\leqslant 5\log 2+\log^+\rho+3\log^+\frac{1}{\rho-r}+\log^+\mathfrak{N}$$

$$+\log^+\frac{1}{\delta(t)}+\log^+T(\rho,g_1)+\log^+\frac{\tau}{r}+\log 2.$$

但是

$$T(\rho,g_1)\leqslant T(\rho,g)+T\left(\rho,\frac{z^\tau}{c_\tau}\right)$$

$$\leqslant T(\rho,g)+\tau\log\rho+\log^+\frac{1}{|c_\tau|},$$

因此

$$\log^+\left|\frac{g'(t)}{g(t)}\right| \leqslant 6\log 2 + \log 3 + 2\log^+ r$$

$$+ 2\log^+\rho + \log^+\frac{1}{r} + 3\log^+\frac{1}{\rho - r} + \log^+\mathfrak{N}$$

$$+ \log^+\frac{1}{\delta(t)} + \log^+ T(\rho, g) + \log^+\log^+\frac{1}{|c_\tau|}. \quad (6.1.2)'$$

引理 6.3. 设函数 $f(z)$ 在圆 $|z| \leqslant R(0 < R < \infty)$ 上亚纯，则对圆 $|z| \leqslant r(0 < r < R)$ 内并与 $f(z)$ 的所有零点与极点的距离不小于 d 的任意点 z 有

$$\log\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right| \leqslant \frac{R+r}{R-r}\, m\left(R, \frac{f'}{f}\right) + \{\bar{n}(R, \infty) + n(R, 0)\}$$

$$\times\left(\log\frac{1}{d} + \log 2R\right) - \frac{(R-r)^2}{4R^2} n(r, f' = 0). \qquad (6.1.3)$$

证. 函数 $\frac{f'(z)}{f(z)}$ 以且仅以 $f(z) = 0$ 或∞的点为其极点，且都是单极点. $\frac{f'(z)}{f(z)}$ 以且仅以 $f(z) \neq 0$ 和 $f'(z) = 0$ 同时成立的点为其零点. $f(z)$ 在圆 $|z| \leqslant R$ 上的零点和极点分别记为 a_j 与 b_k，$f'(z)$在 $|z| \leqslant R$ 上的零点记为 c_l. 再以$\sum' \log\left|\frac{R^2 - \bar{a}_j z}{R(z - a_j)}\right|$ 表示每个 a_j 仅计一次的和数，$\sum'' \log\left|\frac{R^2 - \bar{a}_j z}{R(z - a_j)}\right|$ 表示每个 a_j 计 $m_j - 1$ 次的和数，其中 m_j 为 $f(z)$在 a_j 处零点的重级. 相应地 $\sum' \log\left|\frac{R^2 - \bar{b}_k z}{R(z - b_k)}\right|$表示每个 b_k 仅计一次的和数. 对于 $\frac{f'(z)}{f(z)}$ 应用 Poisson-Jensen 公式则

$$\log\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|\frac{f'(Re^{i\varphi})}{f(Re^{i\varphi})}\right| \frac{R^2 - |z|^2}{R^2 - 2R|z|\cos\varphi + |z|^2}\, d\varphi$$

$$+ \left(\sum' \log\left|\frac{R^2 - \bar{a}_j z}{R(z - a_j)}\right| + \sum' \log\left|\frac{R^2 - \bar{b}_k z}{R(z - b_k)}\right|\right)$$

$$- \left(\sum_l \log\left|\frac{R^2 - \bar{c}_l z}{R(z - c_l)}\right| - \sum'' \log\left|\frac{R^2 - \bar{a}_j z}{R(z - a_j)}\right|\right). (6.1.4)$$

注意到

$$\sum{}' \log\left|\frac{R^2-\bar{a}_j z}{R(z-a_j)}\right|+\sum{}'' \log\left|\frac{R^2-\bar{a}_j z}{R(z-a_j)}\right|$$

$$=\sum_j \log\left|\frac{R^2-\bar{a}_j z}{R(z-a_j)}\right|, \tag{6.1.5}$$

以及当 $|z|\leqslant r$，$|c_l|\leqslant r$ 时由引理 6.1 有

$$\log\left|\frac{R^2-\bar{c}_l z}{R(z-c_l)}\right| \geqslant \log\frac{R^2+|c_l||z|}{R(|z|+|c_l|)}$$

$$=\log\left\{1+\frac{(R-|z|)(R-|c_l|)}{R(|z|+|c_l|)}\right\}$$

$$>\log\left\{1+\frac{(R-r)^2}{2R^2}\right\}>\frac{(R-r)^2}{4R^2}.$$

从而

$$\sum_{|c_l|<R}\log\left|\frac{R^2-\bar{c}_l z}{R(z-c_l)}\right| \geqslant \sum_{|c_l|\leqslant r}\log\left|\frac{R^2-\bar{c}_l z}{R(z-c_l)}\right|$$

$$>\frac{(R-r)^2}{4R^2}n(r,f'=0). \tag{6.1.6}$$

将(6.1.5)，(6.1.6)代入(6.1.4)即得引理结论.

6.1.2. Borel 方向的分布

定理 6.1. 设 λ 为任给的有穷正数，E 为任给的、非空的、闭的实数集合(mod 2π)，则必存在 λ 级亚纯函数 $f(z)$，其全体 Borel 方向构成的集恰为 $\{\arg z=\theta|\theta\in E\}$.

证. 我们用从原点出发的半直线不断等分开平面. 第 $j(j=1,2,\cdots)$ 次是用 j 条半直线 $\arg z=\frac{2k\pi}{j}$ $(k=1,2,\cdots,j)$ 将开平面分为 j 个角域. 在这 j 条半直线中，如果有某些半直线 $\arg z=\frac{2k_0\pi}{j}$，在以它为边的两个闭角域 $\frac{2(k_0-1)\pi}{j}\leqslant\arg z\leqslant\frac{2k_0\pi}{j}$ 和 $\frac{2k_0\pi}{j}\leqslant\arg z\leqslant\frac{2(k_0+1)\pi}{j}$ 内，都不含有点 $e^{i\theta}$，$\theta\in E$，则将这些半直线丢

掉，余下的半直线记为 $L_{jl}(j=1,2,\cdots;\ l=1,2,\cdots,L_j;\ 1\leqslant L_j\leqslant j)$，$L_{jl}$ 的辐角记为 θ_{jl}.

取点

$$a_{jl}=2^j e^{i\theta_{jl}}$$
$$(j=1,2,\cdots;\ l=1,2,\cdots,L_j)$$

与数

$$m_j=\left[\frac{2^{j\lambda}}{j^3}\right]\qquad(j=1,2,\cdots).$$

于此$[x]$表示不超过 x 的最大整数. 由

$$\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{L_j}\frac{m_j}{|a_{jl}|^\lambda}=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{L_j\left[\frac{2^{j\lambda}}{j^3}\right]}{2^{j\lambda}}\leqslant\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j^2}<\infty,$$

以及对于任意正数 ε 有

$$\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{L_j}\frac{m_j}{|a_{jl}|^{\lambda-\varepsilon}}\geqslant\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\left[\frac{2^{j\lambda}}{j^3}\right]}{(2^j)^{\lambda-\varepsilon}}=\infty,$$

因此$\{\underbrace{a_{jl},a_{jl},\cdots,a_{jl}}_{m_j};\ j=1,2,\cdots;\ l=1,2,\cdots,L_j\}$的收敛指数等于 λ. 构造典型乘积

$$\Pi_1(z)=\prod_{j=1}^{\infty}\prod_{l=1}^{L_j}\left(1-\frac{z}{a_{jl}}\right)^{m_j}e^{m_j\left\{\frac{z}{a_{jl}}+\frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_{jl}}\right)^2+\cdots+\frac{1}{q}\left(\frac{z}{a_{jl}}\right)^q\right\}}\quad(6.1.7)$$

其中

$$q=\begin{cases}[\lambda] & \text{当 }\lambda\text{ 不是整数时,}\\ \lambda-1 & \text{当 }\lambda\text{ 为整数时.}\end{cases}$$

再取点

$$b_{jl}=\left(2^j+\frac{1}{2^{j\lambda}}\right)e^{i\theta_{jl}}$$

$$(j=1,2,\cdots;\ l=1,2,\cdots,L_j),$$

可以看出

$$\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{L_j}\frac{m_j}{|b_{jl}|^{\lambda}}\leqslant\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{L_j}\frac{m_j}{|a_{jl}|^{\lambda}}<\infty,$$

以及对于任意正数 ε 有

$$\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{L_j}\frac{m_j}{|b_{jl}|^{\lambda-\varepsilon}}\geqslant\frac{1}{2^{\lambda-\varepsilon}}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{L_j}\frac{m_j}{|a_{jl}|^{\lambda-\varepsilon}}=\infty.$$

于是 $\{\underbrace{b_{jl}, b_{jl}, \cdots, b_{jl}}_{m_j}; j=1,2,\cdots; l=1,2,\cdots, L_j\}$ 的收敛指数也等于 λ. 构造典型乘积

$$\Pi_2(z)=\prod_{j=1}^{\infty}\prod_{l=1}^{L_j}\left(1-\frac{z}{b_{jl}}\right)^{m_j}e^{m_j\left\{\frac{z}{b_{jl}}+\frac{1}{2}\left(\frac{z}{b_{jl}}\right)^2+\cdots+\frac{1}{q}\left(\frac{z}{b_{jl}}\right)^q\right\}} \quad (6.1.8)$$

置

$$f(z)=\frac{\Pi_1(z)}{\Pi_2(z)}, \quad (6.1.9)$$

我们将证明 $f(z)$ 就适合定理的要求.

首先由于典型乘积 $\Pi_1(z)$, $\Pi_2(z)$ 的级均为 λ, 所以 $f(z)$ 的级等于 λ. 我们再证明,若 θ_0 为集 E 中任意一数,则 $\arg z=\theta_0$ 必为 $f(z)$ 的 λ 级 Borel 方向.

设若不然, 则存在正数 ε_0, 在角域 $G: |\arg z-\theta_0|<\varepsilon_0$ 内 $f(z)$ 至少具有一个有穷且异于零的例外值 a_0. 即存在 τ, $0<\tau<\lambda$, 当 r 充分大时有

$$n(r, \theta_0, \varepsilon_0, f=a_0)<r^{\tau}.$$

由于 $\theta_0\in E$, 因此对于每个充分大的 j 存在点 a_{jl}, 使圆 K: $|z-a_{jl}|<4$ 含于域 G 内. 在圆 K 内 $f(z)$ 仅以 a_{jl} 为零点, 重级为 m_j; 仅以 b_{jl} 为极点, 重级为 m_j; 并且 $f(z)-a_0$ 的零点数不超过 r_j^{τ}, 其中 $r_j=2^j+4$.

当 j 充分大时有[1)]

---

1) 当 $f(0)=a_0$ 时, 须以 $f(z)-a_0$ 在原点 Taylor 展式中第一个非零系数取代 $f(0)-a_0$.

$$T(2r_j, f-a_0) < (2r_j)^{\lambda+1},$$

$$\log^+\log^+\frac{1}{|f(0)-a_0|} < (2r_j)^{\lambda+1},$$

$$n(2r_j, f=a_0) < (2r_j)^{\lambda+1},$$

$$n(2r_j, f=\infty) < (2r_j)^{\lambda+1}.$$

在圆 $|z| < 2r_j$ 内以 $f(z)$的所有 a_0-值点与极点为心，

$$d = \frac{1}{8(2r_j)^{\lambda+1}}$$

为半径作除外圆，这些除外圆的总和记为 (γ). 应用引理 6.2，对于$|z| \leqslant r_j$ 内且不属于(γ)的任意点 z 有

$$\begin{aligned}\log\left|\frac{f'(z)}{f(z)-a_0}\right| &\leqslant 5\log 2 + \log^+(2r_j) + 3\log^+\frac{1}{r_j}\\ &+ \log^+ n(2r_j, f=a_0) + \log^+ n(2r_j, f=\infty) + \log 2\\ &+ \log(8(2r_j)^{\lambda+1}) + \log^+ T(2r_j, f-a_0)\\ &+ \log^+\log^+\frac{1}{|f(0)-a_0|} \leqslant (5\lambda+6)\log(2r_j) + 9\log 2.\end{aligned}\tag{6.1.10}$$

由 d 的取法可以看出存在 $r_1, 1 < r_1 < 2$, 与 $r_2, 3 < r_2 < 4$, 使圆周 $|z-a_{jl}| = r_1$ 和 $|z-a_{jl}| = r_2$ 与 (γ) 无交. 应用引理 6.3,对于$|z-a_{jl}| = r_1$ 上的任意点 z 有

$$\begin{aligned}\log\left|\frac{f'(z)}{f(z)-a_0}\right| &\leqslant \frac{r_2+r_1}{r_2-r_1} m\left(r_2, a_{jl}, \frac{f'}{f-a_0}\right)\\ &+ \{\bar{n}(K, f=\infty) + n(K, f=a_0)\}\left(\log\frac{1}{d} + \log 2r_2\right)\\ &- \frac{(r_2-r_1)^2}{4r_2^2} n\left(|z-a_{jl}| \leqslant r_1, \frac{1}{f'}\right).\end{aligned}$$

但是$|z-a_{jl}| = r_2$含于$|z| \leqslant r_j$内且与(γ)无公共点，由(6.1.10)

$$\log\left|\frac{f'(z)}{f(z)-a_0}\right| \leqslant 6\{(5\lambda+6)\log(2r_j) + 9\log 2\}$$

$$+ (1 + r_j^\tau)\{\log 8(2r_j)^{\lambda+1} + \log 8\}$$
$$- \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{16}\left(\frac{2^{j\lambda}}{j^3} - 2\right).$$

注意 $\tau < \lambda$ 与 $r_j = 2^j + 4$，当 j 充分大时，对于 $|z - a_{jl}| = r_1$ 上的任意点 z 便有

$$\log\left|\frac{f'(z)}{f(z) - a_0}\right| < 0. \qquad (6.1.11)$$

另一方面由

$$n(|z - a_{jl}| \leqslant r_1, f = \infty) - n(|z - a_{jl}| \leqslant r_1, f = a_0)$$
$$= -\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-a_{jl}|=r_1} \frac{f'}{f - a_0}\, dz,$$

有

$$\left[\frac{2^{j\lambda}}{j^3}\right] - r_j^\tau \leqslant 2 \max_{|z-a_{jl}|=r_1}\left|\frac{f'(z)}{f(z) - a_0}\right|. \qquad (6.1.12)$$

比较(6.1.11)，(6.1.12)两式得

$$\left[\frac{2^{j\lambda}}{j^3}\right] \leqslant r_j^\tau + 2.$$

由于 $\tau < \lambda$，当 j 充分大时上列不等式不能成立．这样便证明了 $\arg z = \theta_0$ 是 $f(z)$的 Borel 方向．

最后我们证明，若 $\theta_1 \bar{\in} E$，则 $\arg z = \theta_1$ 必不是 $f(z)$ 的 λ 级 Borel 方向．为此我们估计 $\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right|$．由

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{L_j} m_j\left\{\frac{a_{jl} - b_{jl}}{(a_{jl} - z)(b_{jl} - z)} + \frac{b_{jl} - a_{jl}}{a_{jl}b_{jl}}\right.$$
$$+ z\left(\frac{1}{a_{jl}} + \frac{1}{b_{jl}}\right)\left(\frac{b_{jl} - a_{jl}}{a_{jl}b_{jl}}\right) + \cdots$$
$$\left.+ z^{q-1}\left(\frac{1}{a_{jl}^{q-1}} + \cdots + \frac{1}{b_{jl}^{q-1}}\right)\left(\frac{b_{jl} - a_{jl}}{a_{jl}b_{jl}}\right)\right\},$$

若点 z 与所有的 a_{jl}，b_{jl} 的距离都不小于 $d|z|$，$d > 0$，且 $|z|$充分大时，则

$$\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right| \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{L_j} \left\{\frac{1}{d^2|z|^2} + \frac{1}{2^{2j}} + \frac{2|z|}{2^{3j}} + \cdots \right.$$

$$\left. + \frac{q|z|^{q-1}}{2^{(q+1)j}}\right\} \frac{m_j}{2^{j\lambda}} \leqslant \left\{\frac{1}{d^2|z|^2} + 1 + 2|z| + \cdots \right.$$

$$\left. + q|z|^{q-1}\right\} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2}.$$

即

$$\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right| \leqslant \begin{cases} \dfrac{2}{d^2|z|^2} & 当\ q = 0, \\ 2q|z|^{q-1} & 当\ q \geqslant 1. \end{cases} \tag{6.1.13}$$

由于 $\theta_1 \bar{\in} E$，且 E 为闭集，于是存在角域 G_1: $|\arg z - \theta_1| < \delta$，当 i 充分大时，其中不含有半直线 $L_{jl}(j \geqslant j_0, 1 \leqslant l \leqslant L_j)$. 从而当 r 充分大时，在角域 $(|z| > r) \cap G_1$ 内 $f(z)$ 没有零点与极点. 如果 $\arg z = \theta_1$ 是 $f(z)$ 的 λ 级 Borel 方向，根据定理 3.11，存在 $f(z)$ 的一列 λ 级充满圆

$$\Gamma_k: |z - z_k| < \varepsilon_k |z_k|, \quad z_k = |z_k| e^{i\theta_k},$$

$$\lim_{k\to\infty} |z_k| = \infty, \quad \lim_{k\to\infty} \varepsilon_k = 0 \qquad (k = 1, 2, \cdots),$$

使得在每个 Γ_k 内 $f(z)$ 取任意复数 $|z_k|^{\lambda - \delta_k}$ 次，至多可能除去一些复数含于球面半径为 2^{-k} 的两个圆内，其中 $\lim\limits_{k\to\infty} \delta_k = 0$. 再取 Γ_k': $|z - z_k| < 2\varepsilon_k |z_k| (k = 1, 2, \cdots)$. 当 k 充分大时，Γ_k' 含于角域 $|\arg z - \theta_1| < \dfrac{\delta}{2}$ 内. 于是当 k 充分大时，对于 Γ_k' 内的任意点 z 由(6.1.13)有

$$\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right| \leqslant \begin{cases} \dfrac{2}{\left(\sin\dfrac{\delta}{2}\right)^2 |z|^2} \leqslant \dfrac{32}{\delta^2 |z_k|^2} & 当\ q = 0, \\ 2q|z|^{q-1} \leqslant 3q|z_k|^{q-1} & 当\ q \geqslant 1. \end{cases}$$

当 k 充分大时，在 Γ_k' 内必存在点 z_k' 使 $|f(z_k')| \leqslant 1$. 因若不

然，则在 Γ_k' 内有 $|f(z)| > 1$，于是 $f(z)$ 在 Γ_k 内就不取单位圆内的点，但是单位圆不能为球面半径等于 2^{-k} 的两个圆覆盖，这与以上 Γ_k 的含义相矛盾. 我们再断言，在 Γ_k' 内存在点 z_k'' 使 $|f(z_k'')| \geqslant e^{|z_k|^{\lambda-\eta}}$，其中 η 为任给的正数. 设若不然，则在 Γ_k' 内有 $|f(z)| < e^{|z_k|^{\lambda-\eta}}$. 于是

$$T(2\varepsilon_k|z_k|, z_k, f) \leqslant \log^+ M(2\varepsilon_k|z_k|, z_k, f) < |z_k|^{\lambda-\eta}.$$

从而对于任意复数 a 有

$$\begin{aligned} n(\Gamma_k, f = a) &\leqslant \frac{1}{\log 2} N\left(2\varepsilon_k|z_k|, z_k, \frac{1}{f-a}\right) \\ &\leqslant \frac{1}{\log 2}\left\{T(2\varepsilon_k|z_k|, z_k, f) + \log^+|a|\right. \\ &\quad \left. + \log 2 + \log\frac{1}{|f(z_k) - a|}\right\} \\ &\leqslant \frac{1}{\log 2}\left\{|z_k|^{\lambda-\eta} + \log\frac{1}{|f(z_k), a|} + \log 2\right\}. \end{aligned}$$

当 k 充分大时，这与 Γ_k 的含义也矛盾.

故

$$\begin{aligned} |z_k|^{\lambda-\eta} &\leqslant |\log|f(z_k'')| - \log|f(z_k')|| \\ &\leqslant \left|\int_{\overline{z_k'z_k''}} \frac{f'}{f}dz\right| \leqslant 2\varepsilon_k|z_k| \cdot \max_{z\in\overline{z_k'z_k''}}\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right| \\ &\leqslant \begin{cases} \dfrac{64\varepsilon_k}{\delta^2|z_k|} & \text{当 } q = 0, \\ 6q\varepsilon_k|z_k|^q & \text{当 } q \geqslant 1. \end{cases} \end{aligned}$$

注意 $q < \lambda$，η 可取任意小的正数，因此当 k 充分大时上式不可能成立. 即 $\arg z = \theta_1$ 不是 $f(z)$ 的 Borel 方向. 定理就完全得证.

对于有穷正级的整函数，D. Drasin 与 A. Weitsman[2] 获得了其 Borel 方向的分布规律. 他们引进了

定义 6.1. 一个有限序列

$$\theta_1 < \theta_2 < \cdots < \theta_n \leqslant \theta_1 + 2\pi$$

称为 $\lambda\left(>\frac{1}{2}\right)$ 级实数链，若

(i) $\theta_{j+1}-\theta_j \leqslant \frac{\pi}{\lambda} \quad (j=1,2,\cdots,n-1)$,

(ii) $\theta_n-\theta_1 \geqslant \frac{\pi}{\lambda}$,

(iii) 仅当 $n=2$ 时(i)与(ii)中等号可以成立.

Drasin 与 Weitsman 的结果为

定理 6.1′. 任给 $\lambda, 0<\lambda<\infty$，以及 $[0, 2\pi]$ 上的非空、闭集 E，则当 $\lambda \leqslant \frac{1}{2}$ 时不需要对 E 附加任何条件，它恰为一个 λ 级整函数的全体 Borel 方向的辐角值构成的集. 当 $\lambda>\frac{1}{2}$ 时为使 E 是一个 λ 级整函数的全体 Borel 方向的辐角值构成的集，必要且充分的条件是 E 中任何一个值恰巧是一个 λ 级链的一个元素，并且这个 λ 级链的所有元素 $\theta_j(\bmod 2\pi)$ $(j=1,2,\cdots,n)$ 都属于 E.

有兴趣的读者请参阅他们的原文.

§6.2. 亚纯函数与其导数的公共 Borel 方向 I. Milloux 问题

6.2.1. 关于 Milloux 定理

在定理 3.8 里已经证明了，于开平面亚纯且级等于 $\lambda(0<\lambda<\infty)$ 的函数 $f(z)$ 至少存在一条 λ 级 Borel 方向. 由定理 4.2 又知道 $f(z)$ 的导数 $f'(z)$ 的级也等于 λ，于是 $f'(z)$ 也至少具有一条 λ 级 Borel 方向. 1928年 G. Valiron[3] 提出了一个重要而困难的问题：是否亚纯函数与其导数具有公共的 Borel 方向？ 在 A. Rauch[2]，庄圻泰[1] 等获得了一些具有附加条件的结果后，1951 年 H. Milloux[3] 建立了下述突出的定理.

定理 6.2. 若 $f(z)$ 为有穷正级 λ 的整函数，则其导数 $f'(z)$ 的每条 λ 级 Borel 方向亦必为 $f(z)$ 的 λ 级 Borel 方向.

Milloux 自己的证明十分复杂，篇幅很长. 较近张广厚[1] 在涉及导数的情况下，从建立类似于 Valiron 的基本定理着手，对 Milloux 的结果给予了较简单的证明. 同时他将定理 6.2 推广到以 ∞ 为 Borel 例外值的亚纯函数. 然而他在证明中对原始值的处理仍然是较为复杂的.

这里我们建立一个有趣的定理，从它可以立即导出定理6.2和它推广后的结果. 这个定理的证明相当直接，也较简单. (见杨乐[5]).

6.2.2. 基本定理

定理 6.3. 设函数 $f(z)$ 于开平面亚纯，级 λ 为有穷正数，且在角域 $|\arg z| < \gamma_0$ 内以值 ∞ 为 Borel 例外值. 又设

$$\Gamma_k: |z - R_k| < \varepsilon_k R_k, \quad R_{k+1} > 2R_k,$$
$$\lim_{k\to\infty} \varepsilon_k = 0 \qquad (k = 1, 2, \cdots) \tag{6.2.1}$$

为 $f'(z)$ 的一列 λ 级充满圆. 即在每个 Γ_k 内 $f'(z)$ 取所有的复数至少 $R_k^{\lambda - \varepsilon'_k}$ 次，至多除去一些复数可被含在 Riemann 球上的两个球面半径为 δ_k 的小圆内，其中 $\lim_{k\to\infty} \varepsilon'_k = \lim_{k\to\infty} \delta_k = 0$. 若记

$$\beta_k = \left(\sup_{r > R_k^{\frac{1}{2}}} \frac{\log T(r, f)}{\log r}\right) - \lambda, \tag{6.2.2}$$

并且

$$\varepsilon_k \geq \max\left(\frac{2\varepsilon'_k}{\lambda}, \frac{2\beta_k}{\lambda}, \frac{1}{(\log R_k)^{\frac{1}{2}}}\right), \tag{6.2.3}$$

则区域

$$G_k: \left(\frac{R_k^{\lambda - \eta_k}}{2} < |z| < 2R_k^{1+\eta_k}\right) \cap (|\arg z| < 20\pi\eta_k) \tag{6.2.4}$$

$$\eta_k = 4\pi\varepsilon_k^{\frac{1}{2}} \qquad k = 1, 2, \cdots \tag{6.2.5}$$

必包含一个子序列 G_{k_j} 是 $f(z)$ 的 λ 级充满域. 即在每个 G_{k_j} 内，$f(z)$ 取所有的复数至少 $R_{k_j}^{\lambda - \varepsilon'_{k_j}}$ 次，至多可能除去一些复数，被包

含在 Riemann 球上球面半径为 δ'_{k_j} 的两个小圆内，其中

$$\lim_{j\to\infty}\varepsilon''_{k_j}=\lim_{j\to\infty}\delta'_{k_j}=0.$$

证．假设定理结论不成立，即(G_k)不包含一个子序列区域是$f(z)$的λ级充满域，最后将导致矛盾．以下的推演和各个关系式都是对每个充分大的k成立，不每次赘述．

由于 Γ_k 是 $f'(z)$的λ级充满圆，所以存在复数 a_k 使

$$0<|a_k|<1,\ n(\Gamma_k, f'=a_k)>R_k^{\lambda-\varepsilon'_k}. \tag{6.2.6}$$

在区间$[R_k^{1-\eta_k}, R_k^{1+\eta_k}]$上取点

$$r'_{k,p}=R_k^{1-\eta_k}(1+\eta_k)^p,\ p=0,1,2,\cdots,P;$$

其中 $P=\left[\dfrac{2\eta_k\log R_k}{\log(1+\eta_k)}\right]+1$，而$\left[\dfrac{2\eta_k\log R_k}{\log(1+\eta_k)}\right]$

是$\dfrac{2\eta_k\log R_k}{\log(1+\eta_k)}$的整数部分．作两组圆

$$S_{k,p}: |z-r'_{k,p}|<2\eta_k r'_{k,p},$$
$$S'_{k,p}: |z-r'_{k,p}|<40\eta_k r'_{k,p}.$$

若记

$$G'_k: (R_k^{1-\eta_k}<|z|<R_k^{1+\eta_k})\cap(|\arg z|<\eta_k), \tag{6.2.7}$$

则

$$G'_k\subset\left(\bigcup_{p=0}^{P}S_{k,p}\right)\subset\left(\bigcup_{p=0}^{P}S'_{k,p}\right)\subset G_k. \tag{6.2.8}$$

因为(G_k)不包含任何一列子域是$f(z)$的λ级充满域，则从(G_k)中必可选出一列子域(G_{k_j})具有下述性质：对于每个j，存在三个互相判别的复数$a_{l,k_j}(l=1,2,3)$以及不依赖于j的两个正数δ与$\tau_1(\tau_1<\lambda)$，使得$|a_{l_1,k_j}, a_{l_2,k_j}|>\delta$ $(1\leqslant l_1\neq l_2\leqslant 3)$ 以及

$$\sum_{l=1}^{3}n(G_{k_j}, f=a_{l,k_j})<R_{k_j}^{\tau_1}$$

对于所有的正整数j都成立．事实上，取两列趋于0的正数ε''_j，δ'_j，如果上述论断不成立，则对于ε''_1，δ'_1，序列(G_k)中存在子序列$(G_{k,1})$，使得凡是适合$n(G_{k,1}, f=a)<R_{k,1}^{\lambda-\varepsilon''_1}$的复数$a$在

Riemann 球上可含在球面半径为 δ_1' 的两个小圆内. 类似地，对于 ε_2''，δ_2'，序列$(G_{k,1})$中存在子序列$(G_{k,2})$，使得凡是适合 $n(G_{k,2}, f=a) < R_{k,2}^{\lambda-\varepsilon_2''}$ 的复数 a 在 Riemann 球上可含在球面半径为 δ_2' 的两个小圆内. 如此继续下去，最后取对角线序列 $(G_{j,j})$，则对于每个 j 使 $n(G_{j,j}, f=a) < R_{j,j}^{\lambda-\varepsilon_j''}$ 成立的复数 a 可含在球面半径不超过 δ_j' 的两个小圆内，并且 $\lim\limits_{j\to\infty}\varepsilon_j''=\lim\limits_{j\to\infty}\delta_j'=0$. 从而$(G_{j,j})$为 $f(z)$的 λ 级充满域，这与(G_k)不包含一列子域是 $f(z)$的 λ 级充满域相矛盾.

对每个 j，复数 $a_{l,k_j}(l=1,2,3)$中决不能有两个同时位于以 ∞ 为圆心，$\dfrac{\delta}{2}$ 为球面半径的小圆内. 再注意到∞是 $f(z)$的 Borel 例外值以及由球面距离的定义，我们有下述结论（为了符号简便计，以下将子序列 G_{k_j} 仍记为 G_k)：对每个 k 存在三个互相判别的复数 $a_{l,k}(l=1,2,3;\ a_{3,k}=\infty)$以及不依赖于 k 的两个正数 δ 与 $\tau_1(\tau_1<\lambda)$，使得$|a_{1,k}|$，$|a_{2,k}|$与 $\dfrac{1}{|a_{1,k}-a_{2,k}|}$ 都小于 $\dfrac{2}{\delta}$，且

$$\sum_{l=1}^{3} n(G_k, f=a_{l,k}) < R_k^{\tau_1}.$$

置 $h_k(z)=f(z)-a_k z$ 与 $G_{k,p}(t)=h_k(r_{k,p}'+40\eta_k r_{k,p}'t)$，则 $G_{k,p}(t)$在$|t|<1$ 内亚纯，且

$$\sum_{l=1}^{3} n(|t|<1, G_{k,p}(t)=P_{l,k,p}(t)) < R_k^{\tau_1},$$

其中

$$P_{l,k,p}(t)=a_{l,k}-a_k r_{k,p}'-40a_k\eta_k r_{k,p}'t \quad (l=1,2,3).$$

$P_{l,k,p}(t)$在$|t|<1$ 内没有零点和极点，适合

$$\iint\limits_{|t|<1}\log^+\Bigg(\sum_{l=1}^{2}|P_{l,k,p}(t)| + \sum_{1\le l_1\ne l_2\le 3}\frac{1}{|P_{l_1,k,p}(t)-P_{l_2,k,p}(t)|}\Bigg)d\sigma_t=O(\log R_k). \tag{6.2.9}$$

根据定理 3.5，除去 Riemann 球上一个球面半径为 $e^{-R_k^{\xi}}$ 的小圆外，对于任意复数 a 恒有

$$n\left(|t|<\frac{1}{20},\ G_{k,t}=a\right)<AR_k^{\xi_1}.\ \text{即}\ n(S_{k,p},h_k=a)<AR_k^{\xi_1}.$$

再注意到(6.2.8)与

$$P=\left[\frac{2\eta_k\log R_k}{\log(1+\eta_k)}\right]+1\leqslant 4\log R_k+1,$$

于是除去 P 个球面半径为 $e^{-R_k^{\xi}}$ 的小圆后，存在复数 b_k 使

$$|b_k|<1,\qquad |f(0)-b_k|>\frac{1}{2}\text{[1]},$$

$$n(G_k',h_k=b_k)<R_k^{\tau}\quad(\tau<\lambda). \tag{6.2.10}$$

记

$$\xi_k=\frac{2\eta_k}{\pi}, \tag{6.2.11}$$

作变换

$$\zeta=\zeta_k(z)=\frac{z^{\frac{1}{\xi_k}}-R_k^{\frac{1}{\xi_k}}}{z^{\frac{1}{\xi_k}}+R_k^{\frac{1}{\xi_k}}}, \tag{6.2.12}$$

它将角域 $|\arg z|<\eta_k$ 映为单位圆 $|\zeta|<1$. 其逆变换为

$$z=z_k(\zeta)=R_k\left(\frac{1+\zeta}{1-\zeta}\right)^{\xi_k}, \tag{6.2.13}$$

并记 $H_k(\zeta)=h_k(z_k(\zeta))$.

若 $|\zeta|\leqslant 1-\dfrac{2}{R_k^{\frac{\pi}{2}}}$，由(6.2.13)，(6.2.11)其原像 z 有

$$R_k^{1-\eta_k}\leqslant|z|\leqslant R_k^{1+\eta_k}. \tag{6.2.14}$$

根据定理假设，$f(z)$ 在 $|\arg z|<\gamma_0$ 内以 ∞ 为 Borel 例外值，结合(6.2.7)，(6.2.10)，(6.2.14)有

---

1) 当 $f(0)=\infty$ 时，仅要求 b_k 适合 $|b_k|<1$ 与 $n(G_k',h_k=b_k)<R_k^{\tau}$，其中 $\tau<\lambda$.

$$n\left(|\zeta|\leqslant 1-\frac{2}{R_k^{\frac{\pi}{2}}},\ H_k=\infty\right)$$

$$+n\left(|\zeta|\leqslant 1-\frac{2}{R_k^{\frac{\pi}{2}}},\ H_k=b_k\right)\leqslant n(G'_k,\ h_k=\infty)$$

$$+n(G'_k,\ h_k=b_k)<R_k^{\tau'}\quad(\tau'<\lambda).\tag{6.2.15}$$

对于圆 Γ_k 内的任意点 $z=re^{i\theta}$，若其像点为 ζ，则

$$|\zeta|=\left\{1-\frac{4r^{\frac{1}{\xi_k}}R_k^{\frac{1}{\xi_k}}\cos\frac{\theta}{\xi_k}}{r^{\frac{2}{\xi_k}}+2r^{\frac{1}{\xi_k}}R_k^{\frac{1}{\xi_k}}\cos\frac{\theta}{\xi_k}+R_k^{\frac{2}{\xi_k}}}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant\left\{1-\frac{4(1-\varepsilon_k)^{\frac{1}{\xi_k}}\cos\frac{\theta}{\xi_k}}{((1+\varepsilon_k)^{\frac{1}{\xi_k}}+1)^2}\right\}^{\frac{1}{2}}.\tag{6.2.16}$$

注意由(6.2.11)与(6.2.5)有

$$\frac{\varepsilon_k}{\xi_k}=\frac{\varepsilon_k^{\frac{1}{2}}}{8}\to 0,$$

从而

$$\frac{\theta}{\xi_k}\leqslant\frac{\frac{\pi}{2}\varepsilon_k}{\xi_k}\to 0.$$

再计及 $(1-\varepsilon_k)^{\frac{1}{\varepsilon_k}}\to e^{-1}$，有

$$(1-\varepsilon_k)^{\frac{1}{\xi_k}}=\{(1-\varepsilon_k)^{\frac{1}{\varepsilon_k}}\}^{\frac{\varepsilon_k}{\xi_k}}\to 1.$$

由 $1\leqslant(1+\varepsilon_k)^{\frac{1}{\xi_k}}\leqslant\dfrac{1}{(1-\varepsilon_k)^{\frac{1}{\xi_k}}}$，有 $(1+\varepsilon_k)^{\frac{1}{\xi_k}}\to 1$。于是

(6.2.16) 说明 Γ_k 在 $\zeta=\zeta_k(z)$ 下的像含于 $|\zeta|<\dfrac{1}{2}$ 内.

置

$$\nu_k=8\varepsilon_k,\tag{6.2.17}$$

由 (6.2.17)，(6.2.11)，(6.2.5) 与 (6.2.3)，

$$R_k^{\frac{v_k}{\xi_k}} \geqslant R_k^{t_k^{\frac{1}{2}}} \geqslant e^{(\log R_k)^{\frac{1}{4}}} \to \infty. \tag{6.2.18}$$

于是 Γ_k 在 ζ 平面的像含于 $|\zeta| < 1 - \dfrac{6}{R_k^{\frac{v_k}{\xi_k}}}$ 内，再由(6.2.6)

$$n\left(|\zeta| \leqslant 1 - \frac{6}{R_k^{\frac{v_k}{\xi_k}}},\ H'_k = 0\right)$$
$$\geqslant n\ (\Gamma_k, f' = a_k) > R_k^{\lambda - \varepsilon'_k}. \tag{6.2.19}$$

在圆 $|\zeta| \leqslant 1 - \dfrac{2}{R_k^{\frac{\pi}{2}}}$ 内，以 $H_k(\zeta)$ 的每个极点、b_k-值点为心，$d_k = \dfrac{1}{R_k^{\lambda+3}}$ 为半径作除外圆，其全体记为 $(\gamma)_{\zeta,k}$. 由(6.2.15)式 $(\gamma)_{\zeta,k}$ 的直径总和不超过 $\dfrac{1}{R_k^3}$，于是可以选取

$$r_{1,k} = 1 - \frac{6}{R_k^{\frac{v_k}{\xi_k}}}, \tag{6.2.20}$$

$$1 - \frac{4}{R_k^{\frac{\pi}{2}}} < r_{2,k} < 1 - \frac{3}{R_k^{\frac{\pi}{2}}},$$
$$(|\zeta| = r_{2,k}) \cap (\gamma)_{\zeta,k} = \phi. \tag{6.2.21}$$

应用引理 6.3，对于 $|\zeta| \leqslant r_{1,k}$ 内且在 $(\gamma)_{\zeta,k}$ 外的点 ζ 有

$$\log\left|\frac{H'_k(\zeta)}{H_k(\zeta) - b_k}\right| \leqslant \frac{r_{2,k} + r_{1,k}}{r_{2,k} - r_{1,k}}\, m\left(r_{2,k}, \frac{H'_k}{H_k - b_k}\right)$$
$$+ \{\bar{n}(r_{2,k}, H_k = \infty) + n(r_{2,k}, H_k = b_k)\}$$
$$\times\left(\log 2 + \log\frac{1}{d_k}\right) - \frac{(r_{2,k} - r_{1,k})^2}{4r_{2,k}^2}\, n(r_{1,k}, H'_k = 0). \tag{6.2.22}$$

为了估计 $m\left(r_{2,k}, \dfrac{H'_k}{H_k - b_k}\right)$，我们有

$$m\left(r_{2,k}, \frac{H'_k}{H_k - b_k}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ \left\{\frac{|h'_k(z_k(r_{2,k}e^{i\varphi}))|}{|h_k(z_k(r_{2,k}e^{i\varphi})) - b_k|}\right.$$

$$\times |z_k'(r_{2,k}e^{i\varphi})|\Big\} d\varphi \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ \left|\frac{h_k'(z_k(r_{2,k}e^{i\varphi}))}{h_k(z_k(r_{2,k}e^{i\varphi})) - b_k}\right| d\varphi$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ |z_k'(r_{2,k}e^{i\varphi})| d\varphi. \tag{6.2.23}$$

由(6.2.13)有

$$\frac{\xi_k R_k (1-r_{2,k})^{\xi_k-1}}{2^{\xi_k}} \leqslant |z_k'(r_{2,k}e^{i\varphi})| \leqslant \frac{\xi_k R_k 2^{\xi_k}}{(1-r_{2,k})^{\xi_k+1}}. \tag{6.2.24}$$

于是

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ |z_k'(r_{2,k}e^{i\varphi})| d\varphi \leqslant \log^+ \frac{\xi_k R_k 2^{\xi_k}}{(1-r_{2,k})^{\xi_k+1}}$$

$$\leqslant 3\log R_k. \tag{6.2.25}$$

为了估计(6.2.23)右端的第一个积分，我们应用引理 6.2，取

$$g(z) = h_k(z) - b_k, \quad t = z_k(r_{2,k}e^{i\varphi}),$$

$$R = \frac{2^{\xi_k+1} R_k}{(1-r_{2,k})^{\xi_k}}. \tag{6.2.26}$$

这时由

$$\frac{R_k(1-r_{2,k})^{\xi_k}}{2^{\xi_k}} \leqslant |z_k(r_{2,k}e^{i\varphi})| \leqslant \frac{2^{\xi_k} R_k}{(1-r_{2,k})^{\xi_k}}$$

与(6.2.21)，(6.2.10)有

$$R_k^{1-\eta_k} < |t| = r < R < 2R_k^{1+\eta_k},$$

$$R - r \geqslant \frac{2^{\xi_k} R_k}{(1-r_{2,k})^{\xi_k}} \geqslant \frac{R_k^{1+\eta_k}}{2}, \tag{6.2.27}$$

$$\mathfrak{N} = n\left(\frac{2^{\xi_k+1} R_k}{(1-r_{2,k})^{\xi_k}}, h_k = \infty\right)$$

$$+ n\left(\frac{2^{\xi_k+1} R_k}{(1-r_{2,k})^{\xi_k}}, h_k = b_k\right) < R_k^{\lambda+1}, \tag{6.2.28}$$

$$T(R, g) = T\left(\frac{2^{\xi_k+1} R_k}{(1-r_{2,k})^{\xi_k}}, f - a_k z - b_k\right) < R_k^{\lambda+1}, \tag{6.2.29}$$

$$|g(0)| = |f(0) - b_k| > \frac{1}{2}.^{1)} \tag{6.2.30}$$

以下对 $\delta(z)$ 作估算，若点 $\zeta = re^{i\varphi}\left(\frac{1}{2} < r < 1\right)$是 ζ 平面上的一点，则其原像 z 的辐角 $\arg z$ 有

$$\arg z = \xi_k \arg\frac{1+\zeta}{1-\zeta} = \xi_k \arcsin\frac{2r\sin\varphi}{\{(1-r^2)^2 + 4r^2\sin^2\varphi\}^{\frac{1}{2}}}$$

$$\leqslant \xi_k \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{2r}{1+r^2} = \eta_k \frac{1}{1 + \frac{(1-r)^2}{2r}}.$$

当 $0 < x < \frac{1}{4}$ 时有 $\frac{1}{1+x} \leqslant 1 - \frac{x}{2}$，从而

$$\arg z \leqslant \eta_k\left\{1 - \frac{(1-r)^2}{4r}\right\}.$$

于是当点 ζ 位于 $|z| = r_{3,k}$ 上时，其像点 z 有

$$\arg z \leqslant \eta_k\left\{1 - \frac{\left(\frac{3}{R_k^{\frac{\pi}{2}}}\right)^2}{4\left(1 - \frac{3}{R_k^{\frac{\pi}{2}}}\right)}\right\} \leqslant \eta_k\left(1 - \frac{2}{R_k^{\pi}}\right). \tag{6.2.31}$$

设 x_l 是 $|z| \leqslant R$ 内且在 $|\arg z| < \eta_k$ 外 $h_k(z)$ 的极点或 b_k-值点，则由(6.2.27)与(6.2.31)有

$$|z - x_l| \geqslant R_k^{1-\eta_k} \sin\frac{2\eta_k}{R_k^{\pi}} \geqslant \frac{1}{R_k^{\pi}}. \tag{6.2.32}$$

对于 $|\zeta| \leqslant 1$ 上的任意点 ζ，类似于(6.2.24)，并计及(6.2.11)，(6.2.5)，(6.2.3)有

$$|z_k'(\zeta)| \geqslant \frac{\xi_k R_k}{2^{\xi_k}(1-|\zeta|)^{\xi_k - 1}} \geqslant \frac{\xi_k R_k}{2}$$

---

1) 当 $f(0) = \infty$ 时，代替(6.2.30)而注意 $c_\lambda = \lim_{z\to 0} g(z)z^\lambda = \lim_{z\to 0} f(z)z^\lambda$ 为固定数。

$$= 4\varepsilon_k^{\frac{3}{2}} R_k \geqslant \frac{4R_k}{(\log R_k)^{\frac{3}{2}}} \geqslant 1. \qquad (6.2.33)$$

设 x_l' 是 $|\arg z| < \eta_k$ 内 $h_k(z)$ 的极点或 b_k-值点，且它在 ζ 平面上的像 $\zeta_k(x_l')$ 落于 $|\zeta| \leqslant 1 - \frac{2}{R_k^{\frac{\pi}{2}}}$ 内。由(6.2.27)点 t 在 ζ 平面上的像为 $r_{2,k}e^{i\varphi}$，于是

$$|r_{2,k}e^{i\varphi} - \zeta_k(x_l')| = \left| \int_{\overline{tx_l'}} \zeta_k'(z)dz \right|$$

$$\leqslant \left(\max_{z \in \overline{tx_l'}} |\zeta_k'(z)| \right) |t - x_l'| \leqslant \left(\max_{|\zeta| \leqslant 1} \frac{1}{|z_k'(\zeta)|} \right) |t - x_l'|$$

$$= \left(\frac{1}{\min\limits_{|\zeta| \leqslant 1} |z_k'(\zeta)|} \right) |t - x_l'| \leqslant |t - x_l'|.$$

结合(6.2.21)便有

$$|t - x_l'| \geqslant d_k = \frac{1}{R_k^{\lambda+3}}. \qquad (6.2.34)$$

设 x_l'' 是 $|\arg z| < \eta_k$ 内 $h_k(z)$ 的极点或 b_k- 值点，且它在 ζ 平面上的像 $\zeta_k(x_l'')$ 落于 $|\zeta| \leqslant 1 - \frac{2}{R_k^{\frac{\pi}{2}}}$ 外，则如上有

$$|r_{2,k}e^{i\varphi} - \zeta_k(x_l'')| \leqslant \left(\max_{z \in \overline{tx_l''}} |\zeta_k'(z)| \right) |t - x_l''|$$

$$\leqslant \left(\frac{1}{\min\limits_{|\zeta| \leqslant 1} |z_k'(\zeta)|} \right) |t - x_l''| \leqslant |t - x_l''|.$$

从而

$$|t - x_l''| \geqslant \frac{1}{R_k^{\frac{\pi}{2}}}. \qquad (6.2.35)$$

联合(6.2.32)，(6.2.34)，(6.2.35)便有

$$\log \frac{1}{\delta(t)} = \max \left\{ \log \frac{1}{|t - x_l|}, \ \log \frac{1}{|t - x_l'|}, \right.$$

$$\left. \log \frac{1}{|t - x_l''|} \right\} = O(\log R_k). \qquad (6.2.36)$$

将估计式(6.2.27),(6.2.28),(6.2.29),(6.2.30)与(6.2.36)代入(6.1.2)[1]得

$$\log^{+}\left|\frac{h_k'(z_k(r_{2,k}e^{i\varphi}))}{h_k(z_k(r_{2,k}e^{i\varphi}))-b_k}\right| = O(\log R_k). \tag{6.2.37}$$

因此由(6.2.23),(6.2.25)与(6.2.37)有

$$m\left(r_{2,k},\frac{H_k'}{H_k-b_k}\right) = O(\log R_k). \tag{6.2.38}$$

由(6.2.15),(6.2.20),(6.2.21),(6.2.38)与

$$\frac{(r_{2,k}-r_{1,k})^2}{4r_{2,k}^2}n(r_{1,k},H_k=0) \geqslant \left(\frac{1}{R_k^{\frac{\nu_k}{\xi_k}}}\right)^2 n(r_{1,k},H_k'=0)$$

$$> R_k^{\lambda-\varepsilon_k'-\frac{2\nu_k}{\xi_k}}, \tag{6.2.39}$$

代入(6.2.22),当点ζ属于$|\zeta|\leqslant r_{1,k}$且不属于除外圆$(\gamma)_{\zeta,k}$时便有

$$\log\left|\frac{H_k'(\zeta)}{H_k(\zeta)-b_k}\right| < -\frac{1}{2}R_k^{\lambda-\varepsilon_k'-2\frac{\nu_k}{\xi_k}}. \tag{6.2.40}$$

再考察区域

$$D_k:\left(R_k^{1-\frac{\tau_k}{4}}<|z|<R_k^{1+\frac{\tau_k}{4}}\right)\cap(|\arg z|<\nu_k). \tag{6.2.41}$$

当点 $z=re^{i\theta}$ 属于 D_k 时,注意到(6.2.18),其像点ζ有

$$|\zeta| \leqslant \left\{1-\frac{4r^{\frac{1}{\xi_k}}R_k^{\frac{1}{\xi_k}}\cos\frac{\theta}{\xi_k}}{(r^{\frac{1}{\xi_k}}+R_k^{\frac{1}{\xi_k}})^2}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant 1-\frac{(R_k^{1-\frac{\nu_k}{4}})^{\frac{1}{\xi_k}}R_k^{\frac{1}{\xi_k}}}{\{2(R_k^{1+\frac{\nu_k}{4}})^{\frac{1}{\xi_k}}\}^2} < r_{1,k}.$$

若记 $(\gamma)_{z,k}$ 为 $(\gamma)_{\zeta,k}$ 在变换 $\zeta=\zeta_k(z)$ 下的原像,则当点z在D_k内且在$(\gamma)_{\zeta,k}$外时有

---

1) 当$f(0)=\infty$时,则代入(6.1.2)′式。

$$\log\left|\frac{h_k'(z)}{h_k(z)-b_k}\right| = \log\left|\frac{H_k'(\zeta)}{H_k(\zeta)-b_k}\right|$$

$$+\log\frac{1}{|z_k'(\zeta)|} < -\frac{1}{2}R_k^{1-\varepsilon_k'-2\frac{\nu_k}{\varepsilon_k}}. \qquad (6.2.42)$$

这里由(6.2.33) $\log\dfrac{1}{|z_k'(\zeta)|}\leqslant 0$.

应用 Poisson-Jensen 公式，对于 $D_k\cap(|z|\leqslant 2R_k^{1-\frac{\nu_k}{4}})$内且在$(\gamma)_{z,k}$ 外的点 $z_{0,k}$ 有

$$\log|h_k(z_{0,k})-b_k| \leqslant \frac{3R_k^{1-\frac{\nu_k}{4}}+2R_k^{1-\frac{\nu_k}{4}}}{3R_k^{1-\frac{\nu_k}{4}}-2R_k^{1-\frac{\nu_k}{4}}}$$

$$\times m(3R_k^{1-\frac{\nu_k}{4}}, h_k-b_k)$$

$$+\sum_\mu \log\left|\frac{(3R_k^{1-\frac{\nu_k}{4}})^2-\bar{c}_\mu z_{0,k}}{3R_k^{1-\frac{\nu_k}{4}}(z_{0,k}-c_\mu)}\right| \qquad (6.2.43)$$

于此 c_μ 表示圆$|z|\leqslant 3R_k^{1-\frac{\nu_k}{4}}$ 内 $h_k(z)$的极点，重级极点须计及其重数.

对于位在$|\arg z|<\eta_k$ 外的 c_μ，由(6.2.41)，(6.2.17)，(6.2.5)，(6.2.3)有

$$|z_{0,k}-c_\mu| \geqslant R_k^{1-\frac{\nu_k}{4}}\sin(\eta_k-\nu_k)$$

$$\geqslant R_k^{1-\frac{\nu_k}{4}}\frac{\eta_k}{\pi} \geqslant 4R_k^{1-\frac{\nu_k}{4}}\varepsilon_k^{\frac{1}{2}}$$

$$\geqslant \frac{4R_k^{1-\frac{\nu_k}{4}}}{(\log R_k)^{\frac{1}{4}}} \geqslant 1. \qquad (6.2.44)$$

对于位在$|\arg z|<\eta_k$ 内的 c_μ，由于$|c_\mu|\leqslant 3R_k^{1-\frac{\nu_k}{4}}$，它在$\zeta$平面的像 ζ_μ 位于圆$|\zeta|\leqslant r_{1,k}$ 内. 记点 $z_{0,k}$ 在ζ平面的像为$\zeta_{0,k}$，则 $\zeta_{0,k}$ 位于$(\gamma)_{\zeta,k}$ 外. 于是

$$d_k\leqslant|\zeta_{0,k}-\zeta_\mu| = \left|\int_{\overline{z_{0,k}c_\mu}}\zeta_k'(z)dz\right|$$

$$\leqslant\left(\max_{z\in\overline{z_{0,k}c_\mu}}|\zeta_k'(z)|\right)|z_{0,k}-c_\mu|$$

$$\leqslant\left(\max_{|\zeta|\leqslant 1}\frac{1}{|z_k'(\zeta)|}\right)|z_{0,k}-c_\mu|$$

$$=\left(\frac{1}{\min\limits_{|\zeta|\leqslant 1}|z_k'(\zeta)|}\right)|z_{0,k}-c_\mu|\leqslant|z_{0,k}-c_\mu|. \quad (6.2.45)$$

将(6.2.44),(6.2.45)代回(6.2.43)则

$$\log|h_k(z_{0,k})-b_k|<5m\left(3R_k^{1-\frac{\nu_k}{4}},h_k-b_k\right)$$

$$+n\left(3R_k^{1-\frac{\nu_k}{4}},h_k=\infty\right)\log\frac{6R_k^{1-\frac{\nu_k}{4}}}{d_k}$$

$$<\left(5+\frac{\log\dfrac{6R_k^{1-\frac{\nu_k}{4}}}{d_k}}{\log\dfrac{4}{3}}\right)T\left(4R_k^{1-\frac{\nu_k}{4}},h_k-b_k\right).$$

注意 $h_k(z)=f(z)-a_kz$,以及(6.2.6),(6.2.10),(6.2.17),(6.2.2),(6.2.3)得

$$\begin{aligned}\log|h_k(z_{0,k})-b_k|&<(\lambda+5)(\log R_k)T(4R_k^{1-2\varepsilon_k},f)\\&<4^{\lambda+1}(\lambda+5)(\log R_k)R_k^{\lambda-2\lambda\xi_k+\beta_k-2\xi_k\beta_k}\\&<R_k^{\lambda-\lambda\varepsilon_k}.\end{aligned} \quad (6.2.46)$$

可以看出 $(\gamma)_{z,k}$ 中每个闭围线可以被半径不超过 d_k' 的小圆所范围,这些小圆的全体记为 $(\gamma)_{z,k}'$,其中

$$d_k'\leqslant\left(\max_{|\zeta|\leqslant 1-\frac{2}{R_k^{\frac{\pi}{2}}}}|z_k'(\zeta)|\right)d_k$$

$$\leqslant\frac{2^{\xi_k}\xi_kR_k}{\left(\dfrac{2}{R_k^{\frac{\pi}{2}}}\right)^{\xi_k+1}}\cdot\frac{1}{R_k^{\lambda+3}}\leqslant\frac{1}{R_k^{\lambda+\frac{1}{4}}}.$$

再由(6.2.15),$(\gamma)_{z,k}'$ 中所有小圆的半径总和不超过

$$\left\{n\left(|\zeta| \leqslant 1 - \frac{2}{R_k^{\frac{\pi}{2}}}, H_k = \infty\right)\right.$$

$$\left. + n\left(|\zeta| \leqslant 1 - \frac{2}{R_k^{\frac{\pi}{2}}}, H_k = b_k\right)\right\} d_k' < \frac{1}{R_k^{\frac{1}{4}}}. \qquad (6.2.47)$$

对于 D_k 内的任意点 z，以直线段连接 $z_{0,k}$ 与 z，遇 $(\gamma)'_{z,k}$ 时以弧段替代相交部分，得曲线段 L_k. 由(6.2.41)与(6.2.47) L_k 的长度不得超过 $2R_k^{1+\frac{\nu_k}{4}}$. 这时

$$\left|\log \frac{h_k(z) - b_k}{h_k(z_{0,k}) - b_k}\right| = \left|\int_{L_k} \frac{h_k'(u)}{h_k(u) - b_k} du\right|$$

$$< e^{-\frac{1}{2}R_k^{\lambda-\varepsilon_k'-2\frac{\nu_k}{\varepsilon_k}}} \cdot 2R_k^{1+\frac{\nu_k}{4}} < 1. \qquad (6.2.48)$$

从而

$$\log|h_k(z) - b_k| \leqslant \log|h_k(z_{0,k}) - b_k| + 1$$

$$< R_k^{\lambda-\lambda\varepsilon_k} + 1. \qquad (6.2.49)$$

再由(6.2.42)，对于 D_k 内且不属于 $(\gamma)'_{z,k}$ 的任意点 z 有

$$\log|h_k'(z)| < R_k^{\lambda-\lambda\varepsilon_k} + 1 - \frac{1}{2} R_k^{\lambda-\varepsilon_k'-\frac{2\nu_k}{\varepsilon_k}}. \qquad (6.2.50)$$

在 D_k 内选取点 z_k 使 $z_k \bar{\in} (\gamma)'_{z,k}$ 且 $|z_k - R_k| < 1$. 域 D_k 包含了圆 $|z - z_k| < 4\varepsilon_k R_k$. 在圆环 $3\varepsilon_k R_k < |z - z_k| < 4\varepsilon_k R_k$ 内选取圆周 $|z - z_k| = r_k$，与 $(\gamma)'_{z,k}$ 无公共点. 由于(6.2.47)，这两种选取总是可能的. 对于 $|z - z_k| = r_k$ 上所有的点 z，由(6.2.50)，(6.2.6)有

$$\log^+|f'(z)| \leqslant \log^+|h_k'(z)| + \log^+|a_k|$$

$$+ \log 2 < R_k^{\lambda-\lambda\varepsilon_k}. \qquad (6.2.51)$$

从而

$$m(r_k, z_k, f') < R_k^{\lambda-\lambda\varepsilon_k}. \qquad (6.2.52)$$

在角域 $|\arg z| < \gamma_0$ 内 $f'(z)$ 以 ∞ 为 Borel 例外值，于是

$$n(r_k, z_k, f') < R_k^{\tau_1}. \qquad (\tau_1 < \lambda)$$

由于 $z_k \bar{\in} (\gamma)'_{z,k}$，如同(6.2.45)可知 z_k 与 $f(z)$ 的所有极点的距离都大于或等于 d_k，

$$N(r_k, z_k, f') \leqslant \int_{d_k}^{r_k} \frac{n(t, z_k, f')}{t} dt$$

$$< R_k^{\tau} \log \frac{r_k}{d_k} < R_k^{\tau}. \quad (\tau < \lambda) \tag{6.2.53}$$

联合(6.2.52),(6.2.53)便有

$$T(r_k, z_k, f') < 2R_k^{\lambda - \lambda\varepsilon_k}. \tag{6.2.54}$$

另一方面对于任意复数 α, $\alpha \neq f'(z_k)$, 有

$$n(\Gamma_k, f' = \alpha) \leqslant n\left(\frac{3}{2}\varepsilon_k R_k, z_k, f' = \alpha\right)$$

$$\leqslant \frac{1}{\log 2} N\left(r_k, z_k, \frac{1}{f' - \alpha}\right)$$

$$\leqslant \frac{1}{\log 2}\left\{T(r_k, z_k, f') + \log^+|\alpha|\right.$$

$$\left. + \log \frac{1}{|f'(z_k) - \alpha|} + \log 2\right\}$$

$$\leqslant \frac{1}{\log 2}\left\{T(r_k, z_k, f') + \log \frac{1}{|f'(z_k), \alpha|} + \log 2\right\}.$$

将(6.2.54)代入上式后可知除去球面半径为 $e^{-R_k^{\frac{\lambda}{2}}}$ 的小圆后，对于其他复数 α 恒有

$$n(\Gamma_k, f' = \alpha) < \frac{3}{\log 2} R_k^{\lambda - \lambda\varepsilon_k}. \tag{6.2.55}$$

但是按照定理假设，Γ_k 是 $f'(z)$的 λ 级充满圆．即除去球面半径为 δ_k 的两个小圆外，对于其他复数 α 恒有

$$n(\Gamma_k, f' = \alpha) > R_k^{\lambda - \varepsilon'_k}. \tag{6.2.56}$$

比较(6.2.55)，(6.2.56)得 $R_k^{\lambda\varepsilon_k - \varepsilon'_k} < \frac{3}{\log 2}$. 可是由(6.2.3)，

$$R_k^{\lambda\varepsilon_k - \varepsilon'_k} \geqslant R_k^{\frac{\lambda\varepsilon_k}{2}} \geqslant e^{\frac{\lambda}{2}(\log R_k)^{\frac{1}{2}}} \to \infty.$$

这便推出了矛盾，从而定理得以证明．

6.2.3. 推论

现在我们从定理 6.3 推出一系列结论.

系 1. 设函数 $f(z)$ 于开平面亚纯，级 λ 为有穷正数. 若 B: $\arg z=\theta_0(0\leqslant\theta_0<2\pi)$ 是 $f'(z)$ 的一条 λ 级 Borel 方向，且在角域 $|\arg z-\theta_0|<\gamma_0$ 内 $f(z)$以∞为 Borel 例外值，则存在一列趋于∞的正数 R_{k_j} 与一列趋于 0 的正数 η_{k_j} 使得区域

$$\left(\frac{R_{k_j}^{1-\eta_{k_j}}}{2}<|z|<2R_{k_j}^{1+\eta_{k_j}}\right)\cap(|\arg z-\theta_0|<\eta_{k_j})$$
$$(j=1,2,\cdots)\qquad(6.2.57)$$

是 $f(z)$与 $f'(z)$的公共充满域.

事实上无妨设 $\theta_0=0$. 由于 B:$\arg z=0$ 是$f'(z)$的 λ 级 Borel 方向，根据定理 3.11，必存在一列 λ 级充满圆

$$\Gamma_k^*:|z-z_k|<\varepsilon_k^*z_k,\quad \arg z_k=0,$$
$$z_{k+1}>2z_k,\ \lim_{k\to\infty}\varepsilon_k^*=0\qquad(k=1,2,\cdots)$$

使得在每个 Γ_k^* 内 $f'(z)$ 取所有复数 α 至少$|z_k|^{\lambda-\varepsilon_k'}$ 次，可能除去一些复数被包含在球面半径为 δ_k 的两个小圆内，而

$$\lim_{k\to\infty}\varepsilon_k'=\lim_{k\to\infty}\delta_k=0.$$

取

$$R_k=|z_k|,$$
$$\varepsilon_k=\max\left\{\varepsilon_k^*,\frac{2\varepsilon_k'}{\lambda},\frac{2\beta_k}{\lambda},\frac{1}{(\log R_k)^{\frac{1}{2}}}\right\},$$

其中 β_k 由(6.2.2)确定. 圆

$$\Gamma_k:|z-R_k|<\varepsilon_kR_k\qquad(k=1,2,\cdots)$$

包含了 Γ_k^*，于是 Γ_k 是 $f'(z)$ 的一列 λ 级充满圆. 另一方面，Γ_k 又适合定理 6.3 的条件，因此若记 $\eta_k=4\pi\varepsilon_k^{\frac{1}{2}}$，则

$$\left(\frac{R_k^{1-\eta_k}}{2}<|z|<2R_k^{1+\eta_k}\right)\cap(|\arg z|<\eta_k)$$

必包含一个子序列区域是 $f(z)$与 $f'(z)$的公共充满域.

系 2. 在系 1 的假设下，B 是 $f(z)$的一条 λ 级 Borel 方向.

事实上根据系 1 的结论，$G_{k_j}:\left(\frac{R_{k_j}^{1-\eta_{k_j}}}{2}<|z|<2R_{k_j}^{1+\eta_{k_j}}\right)$ $\cap(|\arg z-\theta_0|<\eta_{k_j})(j=1,2,\cdots)$ 是 $f(z)$ 的一列 λ 级充满域．即在每个 G_{k_j} 内 $f(z)$取所有的复数 α 至少 $R_{k_j}^{\lambda-\varepsilon''_{k_j}}$ 次，可能除去一些复数被包含在球面半径不超过 δ'_{k_j} 的两个小圆内，而

$$\lim_{j\to\infty}\varepsilon''_{k_j}=\lim_{j\to\infty}\delta'_{k_j}=0.$$

必要时选取 G_{k_j} 的子序列代替原序列，可以使 G_{k_j} 适合下述性质：$\sum_{j=1}^{\infty}\delta'_{k_j}$ 小于预先指定的任意正数 ρ_0.

于是除去球面半径总和小于 ρ_0 的一列小圆外，对于其他复数 α 与所有的 j 恒有 $n(G_{k_j},f=\alpha)>R_{k_j}^{\lambda-\varepsilon''_{k_j}}$. 从而对于这些 α 与任意正数 ε 有

$$\begin{aligned}\lambda&\geqslant\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log n(r,\theta_0,\varepsilon,f=\alpha)}{\log r}\\&\geqslant\overline{\lim_{j\to\infty}}\frac{\log n(2R_{k_j}^{1+\eta_{k_j}},\theta_0,\varepsilon,f=\alpha)}{\log(2R_{k_j})^{1+\eta_{k_j}}}\\&\geqslant\overline{\lim_{j\to\infty}}\frac{\log(R_{k_j}^{\lambda-\varepsilon''_{k_j}})}{(1+\eta_{k_j})\log(2R_{k_j})}=\lambda.\end{aligned}$$

所以除去球面半径总和可以任意小的一列小圆外，对于其他复数 α 有

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log n(r,\theta_0,\varepsilon,f=\alpha)}{\log r}\right\}=\lambda. \tag{6.2.58}$$

但是由定理 3.9 不难知道(6.2.58)对于任意复数 α 成立，至多可能除去两个复数例外．即 B 是 $f(z)$的 λ 级 Borel 方向.

系3. 设函数 $f(z)$ 于开平面亚纯，级 λ 为有穷正数，且 $f(z)$ 以 ∞ 为 Borel 例外值，则 $f(z)$与其所有各级导数至少具有一条公共的 Borel 方向.

事实上由定理 3.8，级为 $\lambda(0<\lambda<\infty)$的亚纯函数至少存在一条 Borel 方向．而由定理 4.2 亚纯函数与其各级导数有相同的级．因此对于 $f^{(k)}(z)(k=0,1,2,\cdots;\ f^{(0)}(z)=f(z))$都具有一

条 Borel 方向 B_k: $\arg z=\theta_k$ ($k=0,1,2,\cdots;\ 0\leqslant\theta_k<2\pi$). 全体 θ_k 至少有一个聚点 θ^*. 由系 2 易知方向 $\arg z=\theta^*$ 即是 $f(z)$与其所有各级导数的公共 Borel 方向.

§6.3. 亚纯函数与其导数的公共 Borel 方向 II. Milloux 问题的逆问题

6.3.1 几个引理

在 §6.2 里我们看到，若有穷正级亚纯函数 $f(z)$以∞为 Borel 例外值，则其导数的 Borel 方向必为函数的 Borel 方向. 人们自然会问是否函数的 Borel 方向是其导数的 Borel 方向呢? 这就是 Milloux 问题的逆问题.

为了论述这个问题，我们先建立几个引理.

引理 6.4. 设 $f(z)$ 于$|z|\leqslant R(<\infty)$上亚纯. 若

$$\mathfrak{N}=n(R,f=0)+n(R,f=1)+n(R,f=\infty),$$

并设原点 0 不属于这 $\mathfrak{N}$ 个点以及数 $h\left(\leqslant\dfrac{R-r}{32e}\right)$的 Boutroux-Cartan 除外圆 (γ)，则对于任意的 $r, 0<r<R$，有

$$T(r,f)<\frac{CR(\mathfrak{N}+1)}{R-r}\log\frac{2R^2}{h(R-r)}+\log^+|f(0)|. \tag{6.3.1}$$

证. 我们仅须证明

$$T(r,f)<\frac{CR(\mathfrak{N}+1)}{R-r}\left\{\log\frac{2R^2}{h(R-r)}+\log^+|f(0)|\right\}. \tag{6.3.2}$$

事实上，若上式成立，当$|f(0)|\leqslant 1$时即为(6.3.1). 当$|f(0)|>1$时由

$$T(r,f)=T\left(r,\frac{1}{f}\right)+\log|f(0)|$$

以及对函数 $\dfrac{1}{f(z)}$ 应用(6.3.1)式，也可立即推得引理的结论.

先考虑 $R=1$ 的情况. 由于(γ)的半径总和不超过$2eh\leqslant$

$\frac{1-r}{16}$，因此在圆环 $r<|z|<\frac{1+r}{2}$ 内必存在圆周 $|z|=\rho$ 与 (γ) 无公共点.

记 $|f(\zeta)|=\max\limits_{|z|=\rho}|f(z)|$. 以直线段连结原点与 ζ，遇 (γ) 中的小圆则以相应弧段替代相交部分，这样得曲线段 L，位于 (γ) 外，其长度小于 $\rho+2\pi(2eh)<1$.

区分两种情况：

(1) 在 L 上恒有 $|f'(z)|<1$，这时

$$|f(\zeta)|\leqslant|f(0)|+\left|\int_L f'(z)dz\right|<|f(0)|+1,$$

因而

$$m(\rho,f)<\log^+|f(0)|+\log 2.$$

结合

$$N(\rho,f)\leqslant\mathfrak{N}\log\frac{2}{h},$$

便有

$$T(\rho,f)<\mathfrak{N}\log\frac{2}{h}+\log^+|f(0)|+\log 2. \qquad (6.3.3)$$

但是 $T(r,f)\leqslant T(\rho,f)$，于是在这种情况引理成立.

(2) 在 L 上存在 z_0 使 $|f'(z_0)|\geqslant 1$，而在从 O 至 z_0 的部分恒有 $|f(z)|<1$. 当 $|f'(0)|\geqslant 1$ 时，则取 O 为 z_0. 在以 z_0 为心 $\frac{3+r}{4}-|z_0|$ 为半径的圆内考虑，注意 $|\zeta-z_0|<(\rho-|z_0|)+4eh$. 若以 b_ν 表示 $f(z)$ 在 $|z-z_0|\leqslant\frac{3+r}{4}-|z_0|$ 内的极点，其总数为 $n\left(\frac{3+r}{4}-|z_0|,z_0,f=\infty\right)$. 由 Poisson-Jensen 公式有

$$\begin{aligned}m(\rho,f)&\leqslant\log^+|f(\zeta)|\\&<\frac{2}{\left(\frac{3+r}{4}-|z_0|\right)-(\rho-|z_0|+4eh)}\\&\quad\times m\left(\frac{3+r}{4}-|z_0|,z_0,f\right)\end{aligned}$$

$$+\sum_{v}\log\left|\frac{\left(\frac{3+r}{4}-|z_0|\right)^2-\overline{(b_v-z_0)}(\zeta-z_0)}{\left(\frac{3+r}{4}-|z_0|\right)(\zeta-b_v)}\right|$$

$$<\frac{16}{1-r}m\left(\frac{3+r}{4}-|z_0|, z_0, f\right)+\sum_{v}\log\frac{2}{|\zeta-b_v|}.$$

为了估计 $m\left(\frac{3+r}{4}-|z_0|, z_0, f\right)$，我们应用定理3.2并注意到 $|f(z_0)|\leqslant|f(0)|+1$，$|f'(z_0)|\geqslant 1$ 以及 $z_0\bar{\in}(\gamma)$. 于是

$$m\left(\frac{3+r}{4}-|z_0|, z_0, f\right)$$

$$<C\left\{\mathfrak{N}\log\frac{2}{h}+\log^+|f(0)|+\log\frac{2}{1-r}\right\}.$$

ζ 也不属于(γ)，因此

$$m(\rho, f)<\frac{C(\mathfrak{N}+1)}{1-r}\left\{\log\frac{2}{h(1-r)}+\log^+|f(0)|\right\}.$$

再结合

$$N(\rho, f)<\mathfrak{N}\log\frac{2}{h},$$

也得到(6.3.2).

当 $R\neq 1$ 时，仅须命 $z=Rt$ 以及 $f(z)=f(Rt)=g(t)$，则 $g(t)$在 $|t|\leqslant 1$ 上亚纯，且

$$\mathfrak{N}=n(1, g=0)+n(1, g=1)+n(1, g=\infty).$$

原点O不属于这 $\mathfrak{N}$ 个点以及数 $\frac{h}{R}$ 的 Boutroux-Cattan 除外圆. 按照以上的证明应有

$$T\left(\frac{r}{R}, g\right)<\frac{C(\mathfrak{N}+1)}{1-\frac{r}{R}}\left\{\log\frac{2}{\frac{h}{R}\left(1-\frac{r}{R}\right)}+\log^+|g(0)|\right\}.$$

于是

$$T(r, f)<\frac{CR(\mathfrak{N}+1)}{R-r}\left\{\log\frac{2R^2}{h(R-r)}+\log^+|f(0)|\right\}.$$

我们再将引理 6.4 转换为便于应用的形式.

引理 6.5. 设$f(z)$于$|z| \leqslant R(<\infty)$上亚纯，$a_\nu(\nu=1,2,3)$为任意三个复数，相互间的球面距离大于一正数 d. 若

$$\mathfrak{N}=\sum_{\nu=1}^{3} n(R, f=a_\nu),$$

并设原点O不属于这 $\mathfrak{N}$ 个点以及数 $h\left(\leqslant \frac{R-r}{32e}\right)$的 Boutroux-Cartan 除外圆$(\gamma)$，则对于任意的 $r, 0<r<R$，有

$$T(r, f)<\frac{CR(\mathfrak{N}+1)}{R-r} \log \frac{2R^2}{h(R-r)}$$

$$+C\log\frac{2}{d}+\log^{+}|f(0)|. \tag{6.3.4}$$

证. 适当调换 a_ν 的次序后可使 $\max(|a_1|, |a_2|) \leqslant |a_3|$. 由于 $a_\nu(\nu=1, 2, 3)$相互间的球面距离 $>d$，于是

$$|a_\nu, \infty|>\frac{d}{2} \qquad (\nu=1, 2).$$

从而

$$|a_\nu|<\frac{2}{d} \qquad (\nu=1, 2).$$

置

$$g(z)=\frac{f(z)-a_1}{f(z)-a_2} \cdot \frac{a_3-a_2}{a_3-a_1}.$$

无妨设$|g(0)| \leqslant 1$，否则将 a_1, a_2 互换即可. 对 $g(z)$应用引理 6.4 有

$$T(r, g)<\frac{CR(\mathfrak{N}+1)}{R-r} \log \frac{2R^2}{h(R-r)}.$$

但是

$$T(r, f) \leqslant T(r, f-a_2)+\log^{+}|a_2|+\log 2$$

$$=T\left(r, \frac{1}{f-a_2}\right)+\log|f(0)-a_2|+\log^{+}|a_2|+\log 2$$

$$\leqslant T\left(r, \frac{f-\alpha_1}{f-\alpha_2}\right) + \log^+ \frac{1}{|\alpha_2-\alpha_1|} + \log 2$$

$$+ \log|f(0)-\alpha_2| + \log^+|\alpha_2| + \log 2$$

$$\leqslant T(r, g) + \log^+\left|\frac{\alpha_3-\alpha_1}{\alpha_3-\alpha_2}\right| + \log^+\frac{1}{|\alpha_2-\alpha_1|}$$

$$+ \log^+|f(0)| + 2\log^+|\alpha_2| + 3\log 2.$$

注意到

$$\log^+\left|\frac{\alpha_3-\alpha_1}{\alpha_3-\alpha_2}\right| = \log^+\left|1+\frac{\alpha_2-\alpha_1}{\alpha_3-\alpha_2}\right| \leqslant \log^+|\alpha_2|$$

$$+ \log^+|\alpha_1| + 2\log 2 + \log^+\frac{1}{|\alpha_3-\alpha_2|},$$

于是

$$T(r, f) \leqslant T(r, g) + C\log\frac{2}{d} + \log^+|f(0)|$$

$$< C\frac{R(\mathfrak{N}+1)}{R-r}\log\frac{2R^2}{h(R-r)} + C\log\frac{2}{a} + \log^+|f(0)|.$$

为了以后的应用，我们还需要

引理 6.6. 设 $f(z)$于$|z| \leqslant R(<\infty)$上亚纯．若

$$\mathfrak{N} = n(R, f=0) + n(R, f=1) + n(R, f=\infty),$$

并设原点O与这 $\mathfrak{N}$ 个点的距离有一正的下界 d_1，则对于任意的 r，$0<r<R$，有

$$T(r, f) < \frac{CR(\mathfrak{N}+1)}{R-r}\log\frac{2R^2(\mathfrak{N}+1)}{d_1(R-r)} + \log^+|f(0)|. \quad (6.3.5)$$

证明可以如同引理 6.4 的步骤进行，主要的不同是在考虑 $R=1$ 的情况时，先要以 $f(z)=0, 1, \infty$ 的所有值点为圆心，$\frac{d_1(1-r)}{12(\mathfrak{N}+1)}$ 为半径作普通除外圆，其总和记为(γ)．显然 $O\bar{\in}(\gamma)$，且在圆环 $r<|z|<\frac{1+r}{2}$ 内存在$|z|=\rho$ 与(γ)无公共点．于是证明可类似地完成．

6.3.2. Valiron 型的基本定理

为了论述 Milloux 问题的逆问题，下面再建立两个基本定理[1]。

定理 6.4. 设 $f(z)$是 $|z|<1$ 内的亚纯函数，$a_l(l=1,2,3)$ 是三个复数（其中可以有一个为∞），相互间的球面距离均大于 d，$0<d<\frac{1}{2}$，并且有

$$n_{1)}(1,f=0)+\sum_{l=1}^{3}n(1,f'=a_l)<N. \tag{6.3.6}$$

再设$(\gamma)_1$ 是相应于$|z|<1$ 内 $f(z)$ 的所有极点以及数 $h=\frac{1}{256e}$ 的 Boutroux-Cartan 除外圆，则 $f(z)$在$|z|\leqslant\frac{1}{8}$ 内取任意复数 a 的次数

$$n\left(\frac{1}{8},f=a\right)<C\left\{N+\log\frac{1}{d}+\log^+\log^+|f(z_0)|\right.$$
$$\left.+\log\frac{1}{|f(z_0),a|}\right\}, \tag{6.3.7}$$

其中 $|z_0|<\frac{1}{32}$ 且不属于$(\gamma)_1$.

证。设$(\gamma)_2$ 是相应于$|z|<1$ 内

$$n_{1)}(1,f=0)+\sum_{l=1}^{3}n(1,f'=a_l)$$

个点：$f(z)$ 的单零点和 $f'(z)$的 a_l- 值点 $(l=1,2,3)$ 及数 h 的 Boutroux-Cartan 除外圆．置

$$(\gamma)=(\gamma)_1+(\gamma)_2,$$

1) 参阅张广厚[1]中的(II).

则(γ)中诸圆的半径总和不超过 $\frac{1}{64}$. 于是在$|z|<\frac{1}{32}$内存在点 $z_1\bar{\in}(\gamma)$, 以及圆环 $\frac{1}{4}<|z-z_1|<\frac{3}{8}$ 内存在圆周$|z-z_1|=\rho$ 与(γ)没有公共点.

区分两种情况:

(1) 在$|z-z_1|\leqslant\rho$ 上且在(γ)外恒有$|f'(z)|<1$.

这时对于$|z-z_1|=\rho$ 上任意点 ζ, 用直线段连结 z_1 与ζ, 遇(γ)中的小圆则以相应的弧段取代相交部分, 这样得到曲线段 $L_{z_1\zeta}$. 显然其长度不超过 $\frac{1}{4}+2\pi\cdot\frac{1}{64}<1$.

于是

$$|f(\zeta)|\leqslant|f(z_1)|+\left|\int_{L_{z_1\zeta}}f'(z)dz\right|<|f(z_1)|+1,$$

从而

$$m(\rho,z_1,f)\leqslant\log^+|f(z_1)|+1.$$

为了寻求 $N(\rho,z_1,f)$的一个合适的上界. 我们注意 $f'(z)$在圆 $|z-z_1|<\rho+\frac{1}{2}$ 内亚纯, 取三个复数 $a_l(l=1,2,3)$的次数总和不超过 N. 点 z_1 不属于 $f'(z)$的 a_l- 值点$(l=1,2,3)$与数 h 的 Boutroux-Cartan 除外圆,并且

$$h=\frac{1}{256e}<\frac{\left(\rho+\frac{1}{2}\right)-\rho}{32e}.$$

应用引理 6.5 有

$$T(\rho,z_1,f')<\frac{C(N+1)}{\frac{1}{2}}\log\frac{2}{\frac{1}{256e}\cdot\frac{1}{2}}$$

$$+C\log\frac{2}{d}+\log^+|f'(z_1)|. \tag{6.3.8}$$

计及$|f'(z_1)|<1$ 与 $d<\frac{1}{2}$ 遂有

$$T(\rho, z_1, f') < C\left(N + \log \frac{1}{d}\right).$$

从而

$$\begin{aligned} T(\rho, z_1, f) &= m(\rho, z_1, f) + N(\rho, z_1, f) \\ &\leqslant m(\rho, z_1, f) + T(\rho, z_1, f') \\ &< \log^+|f(z_1)| + C\left(N + \log \frac{1}{d}\right). \end{aligned}$$

因此对于任意复数 a

$$n\left(\frac{3}{16}, z_1, \frac{1}{f-a}\right) \leqslant \frac{1}{\log \dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{16}}} N\left(\frac{1}{4}, z_1, \frac{1}{f-a}\right)$$

$$\leqslant \frac{1}{\log \frac{4}{3}} N\left(\rho, z_1, \frac{1}{f-a}\right)$$

$$\leqslant \frac{1}{\log \frac{4}{3}} \left\{T(\rho, z_1, f) + \log^+|a| + \log 2 + \log \frac{1}{|f(z_1) - a|}\right\}$$

$$< C\left\{N + \log \frac{1}{d} + \log \frac{1}{|f(z_1), a|}\right\}.$$

但是 $|z| \leqslant \frac{1}{8}$ 含于 $|z - z_1| \leqslant \frac{3}{16}$ 内，于是

$$\begin{aligned} n\left(\frac{1}{8}, \frac{1}{f-a}\right) &\leqslant n\left(\frac{3}{16}, z_1, \frac{1}{f-a}\right) \\ &< C\left\{N + \log \frac{1}{d} + \log \frac{1}{|f(z_1), a|}\right\}. \end{aligned} \tag{6.3.9}$$

(2) 在 $|z - z_1| \leqslant \rho$ 上并在 (γ) 外存在点 z_2 使得 $|f'(z_2)|$

$\geqslant 1$. 连结 z_1 与 z_2，遇(γ)中小圆则以相应的弧段替代相交部分，这样得曲线段 L，其长度小于 1. 在 L 上存在点 z_3 (z_3 可能与 z_1 重合)使得 $|f'(z_3)|\geqslant 1$，且在 $L_{z_1 z_3}$ 上有 $|f'(z)|<1$. 故

$$|f(z_3)|\leqslant|f(z_1)|+\left|\int_{L_{z_1 z_3}} f'(z)dz\right|\leqslant|f(z_1)|+1.$$

注意

$$|z_3|\leqslant|z_1|+\rho\leqslant\frac{13}{32}, \tag{6.3.10}$$

于是 $|z-z_3|<\frac{19}{32}$ 含于 $|z|<1$ 内. 当 $0<r<\frac{19}{32}$ 时由

$$m\left(r,z_3,\frac{1}{f}\right)\leqslant m\left(r,z_3,\frac{f'}{f}\right)+m\left(r,z_3,\frac{1}{f'}\right)$$

出发，对 $m\left(r,z_3,\frac{1}{f}\right)$ 与 $m\left(r,z_3,\frac{1}{f'}\right)$ 分别应用 Jensen 公式即有

$$\begin{aligned}
T\left(r,z_3,\frac{1}{f}\right)&\leqslant T(r,z_3,f')+N\left(r,z_3,\frac{1}{f}\right)\\
&\quad-N\left(r,z_3,\frac{1}{f'}\right)+\log\frac{1}{|f'(z_3)|}+m\left(r,z_3,\frac{f'}{f}\right)\\
&\leqslant T(r,z_3,f')+\overline{N}\left(r,z_3,\frac{1}{f}\right)+\log\frac{1}{|f'(z_3)|}\\
&\quad+m\left(r,z_3,\frac{f'}{f}\right).
\end{aligned}$$

但是

$$\begin{aligned}
\overline{N}\left(r,z_3,\frac{1}{f}\right)&=N_{1)}\left(r,z_3,\frac{1}{f}\right)+\overline{N}_{(2}\left(r,z_3,\frac{1}{f}\right)\\
&\leqslant N_{1)}\left(r,z_3,\frac{1}{f}\right)+\frac{1}{2}N_{(2}\left(r,z_3,\frac{1}{f}\right)\\
&\leqslant\frac{1}{2}N_{1)}\left(r,z_3,\frac{1}{f}\right)+\frac{1}{2}T\left(r,z_3,\frac{1}{f}\right),
\end{aligned}$$

从而

$$T\left(r, z_3, \frac{1}{f}\right) \leqslant N_1\left(r, z_3, \frac{1}{f}\right) + 2T(r, z_3, f')$$

$$+ 2\log\frac{1}{|f'(z_3)|} + 2m\left(r, z_3, \frac{f'}{f}\right). \qquad (6.3.11)$$

由

$$\sum_{i=1}^{3} n\left(\frac{19}{32}, z_3, f = a_i\right) < N,$$

如同(6.3.8)式的推导，当 $0 < r < \frac{19}{32}$ 时有

$$T(r, z_3, f') < C\left(N + \log\frac{1}{d}\right) + \log^+|f'(z_3)|. \qquad (6.3.12)$$

根据 $n_1\left(\frac{19}{32}, z_3, \frac{1}{f}\right) < N$ 与 $z_3 \bar{\in} (\gamma)$ 有

$$N_1\left(r, z_3, \frac{1}{f}\right) < CN \qquad \left(0 < r < \frac{19}{32}\right). \qquad (6.3.13)$$

应用引理 1.3，对于 $0 < r < t < \frac{19}{32}$ 有

$$m\left(r, z_3, \frac{f'}{f}\right) = m\left(r, z_3, \frac{\left(\frac{1}{f}\right)'}{\frac{1}{f}}\right) \qquad (6.3.14)$$

$$< 10 + 4\log^+\log^+|f(z_3)|$$

$$+ 2\log^+\frac{1}{r} + 3\log^+\frac{1}{t-r} + 4\log^+ T\left(t, z_3, \frac{1}{f}\right).$$

将(6.3.12)，(6.3.13)与(6.3.14)代入(6.3.11)，并计及 $|f'(z_3)| \geqslant 1$，则得

$$T\left(r, z_3, \frac{1}{f}\right) < C\left\{N + \log\frac{1}{d} + \log^+\log^+|f(z_3)|\right.$$

$$\left. + \log^+\frac{1}{r}\right\} + 6\log^+\frac{1}{t-r} + 8\log^+ T\left(t, z_3, \frac{1}{f}\right)$$

应用引理 2.4 消去项 $8\log^+T\left(t, z_3, \frac{1}{f}\right)$，然后取 $r=\frac{18}{32}$ 便得

$$T\left(\frac{18}{32}, z_3, \frac{1}{f}\right)< C\left\{N+\log\frac{1}{d}+\log^+\log^+|f(z_3)|\right\}.$$

从而对于任意复数 a 有

$$\begin{aligned}n\left(\frac{17}{32}, z_3, \frac{1}{f-a}\right) &< CN\left(\frac{18}{32}, z_3, \frac{1}{f-a}\right)\\ &< C\left\{T\left(\frac{18}{32}, z_3, f\right)+\log^+|a|+\log 2+\log\frac{1}{|f(z_3)-a|}\right\}\\ &< C\left\{T\left(\frac{18}{32}, z_3, \frac{1}{f}\right)+\log 2+\log\frac{1}{|f(z_3), a|}\right\}\\ &< C\left\{N+\log\frac{1}{d}+\log^+\log^+|f(z_3)|+\log\frac{1}{|f(z_3), a|}\right\}.\end{aligned}$$

但由(6.3.10)，$|z|\leqslant\frac{1}{8}$ 含于 $|z-z_3|\leqslant\frac{17}{32}$ 内，从而

$$n\left(\frac{1}{8}, \frac{1}{f-a}\right)< C\left\{N+\log\frac{1}{d}+\log^+\log^+|f(z_3)|+\log\frac{1}{|f(z_3), a|}\right\}. \tag{6.3.15}$$

定理 6.4 只涉及到 $f(z)$ 的一级导数，在普遍的情形我们有

定理 6.5. 设 $f(z)$ 是 $|z|<1$ 内的亚纯函数，$a_l\ (l=1, 2, 3)$ 是三个复数(其中可以有一个为 ∞)，相互间的球面距离均大于 d，$0<d<\frac{1}{2}$. 又设$(\gamma)_1$ 是相应于 $|z|<1$ 内 $f(z)$ 的零点和极点以及数 $h=\frac{1}{256e}$ 的 Boutroux-Cartan 除外圆. 若对某正整数 k 有

$$n(1, f=0)+\sum_{l=1}^{3}n(1, f^{(k)}=a_l)< N, \tag{6.3.16}$$

则对于任意复数 a 有

$$n\left(\frac{1}{8}, \frac{1}{f-a}\right)< C_k\left\{N+\log\frac{1}{d}+\log^+\log^+|f(z_0)|\right.$$

$$+ \log^+ \log^+ \frac{1}{|f(z_0)|} + \log \frac{1}{|f(z_0), a|}\Big\}, \qquad (6.3.17)$$

其中 $|z_0| < \frac{1}{32}$ 且不属于$(\gamma)_1$.

事实上如同定理 6.4 的证明，对于 $|z| < 1$ 内 $f^{(k)}(z)$的 a_l-值点$(l = 1, 2, 3)$及 h 的 Boutroux-Cartan 除外圆记为$(\gamma)_2$，置$(\gamma) = (\gamma)_1 + (\gamma)_2$. 取点 z_1 与圆周$|z - z_1| = \rho$. 区分以下两种情况:

(1) 在$|z - z_1| \leqslant \rho$ 上且在(γ)外恒有 $\sum_{j=1}^{k} |f^{(j)}(z)| < 1$. 这时仍有:

$$m(\rho, z_1, f) \leqslant \log^+ |f(z_1)| + 1.$$

以及

$$T(\rho, z_1, f^{(k)}) < C\left(N + \log \frac{1}{d}\right).$$

从而有(6.3.17).

(2) 在$|z - z_1| \leqslant \rho$ 上并在(γ)外存在点 z_2 使得

$$\sum_{j=1}^{k} |f^{(j)}(z_2)| \geqslant 1.$$

连结 z_1, z_2 且在(γ)外的曲线段记为 L. 在 L 上存在点 z_3 使得 $\sum_{j=1}^{k} |f^{(j)}(z_3)| \geqslant 1$，且在 $L_{z_1 z_3}$ 上有 $\sum_{j=1}^{k} |f^{(j)}(z)| < 1$.

应用

$$T\left(r, z_3, \frac{1}{f}\right) \leqslant T(r, z_3, f^{(k)}) + N\left(r, z_3, \frac{1}{f}\right)$$
$$+ \log \frac{1}{|f^{(k)}(z_3)|} + m\left(r, z_3, \frac{f^{(k)}}{f}\right).$$

由引理 4.3 有

$$m\left(r, z_3, \frac{f^{(k)}}{f}\right) < C_k\Big\{1 + \log^+ \log^+ \frac{1}{|f(z_3)|}$$

$$+\log^{+}\frac{1}{r}+\log^{+}\frac{1}{t-r}+\log^{+}T(t, z_3, f)\Big\}$$

$$< C_k\Big\{1+\log^{+}\log^{+}\frac{1}{|f(z_3)|}+\log^{+}\log^{+}|f(z_3)|$$

$$+\log^{+}\frac{1}{r}+\log^{+}\frac{1}{t-r}+\log^{+}T\left(t, z_3, \frac{1}{f}\right)\Big\},$$

证明便可如同定理 6.4 一样完成.

6.3.3. 应用

回到关于公共 Borel 方向的问题,我们有

定理 6.6. 设 $f(z)$于开平面亚纯,级 λ 为有穷正数. 若 B:$\arg z = \theta_0$ 是 $f(z)$ 的一条 λ 级 Borel 方向, 并且在角域 $|\arg z-\theta_0| < \eta_0$ ($\eta_0>0$)内 $f(z)$以一个有穷复数 a_0 为单级 Borel 例外值, 则B 亦必为 $f'(z)$的 Borel 方向.

证. 我们仅需考虑 $a_0=0$ 的情况. 当 $a_0\neq 0$ 时置 $f_1(z)=f(z)-a_0$, 显然B 也是 $f_1(z)$的一条 λ 级 Borel 方向,且 $f_1'(z)=f'(z)$.

如果定理结论不成立,即B 不是 $f'(z)$的 Borel 方向,则必存在角域$|\arg z-\theta_0|<\eta_1$($\eta_1>0$)使得在此角域内 $f'(z)$有三个 Borel 例外值 a_l($l=1, 2, 3$).

另一方面由定理 3.11, $f(z)$ 存在一列 λ 级充满圆

$$\Gamma_j: |z-z_j|<\varepsilon_j|z_j|, \quad \lim_{j\to\infty}\varepsilon_j=0,$$

$$\lim_{j\to\infty}|z_j|=\infty, \quad \arg z_j=\theta_0 \qquad (j=1, 2, \cdots).$$

与其相应地考虑一列圆

$$\Gamma_j': |z-z_j|<8\varepsilon_j|z_j| \qquad (j=1, 2, \cdots).$$

当 j 充分大时, Γ_j' 必然完全包含在角域 $|\arg z|<\min(\eta_0, \eta_1)$ 内.

对于每个充分大的 j, 置

$$g(t)=\frac{f(z_j+8\varepsilon_j|z_j|t)}{8\varepsilon_j|z_j|}.$$

$g(t)$在$|t|<1$内亚纯，且适合

$$n_{1)}(1, g=0)+\sum_{l=1}^{3} n(1, g'=\alpha_l)$$

$$\leqslant n_{1)}(2|z_j|, \theta_0, \eta_0, f=0)+\sum_{l=1}^{3} n(2|z_j|, \theta_0, \eta_1, f'$$

$$=\alpha_l)<|z_j|^{\tau} \qquad (\tau<\lambda).$$

应用定理 6.4，对于任意复数 a 有

$$n\left(\frac{1}{8}, g=\frac{a}{8\varepsilon_j|z_j|}\right)<C\left\{|z_j|^{\tau}+\log\frac{1}{d}\right.$$

$$\left.+\log^+\log^+|g(t_0)|+\log\frac{1}{\left|g(t_0), \dfrac{a}{8\varepsilon_j|z_j|}\right|}\right\},$$

其中 d 为一固定正数，等于 $\alpha_l(l=1,2,3)$相互间球面距离的最小者；$|t_0|<\frac{1}{32}$，且 t_0 不属于$|t|<1$ 内 $g(t)$的所有极点以及数 $h=\frac{1}{256e}$ 的 Boutroux-Cartan 除外圆。

于是

$$n(\Gamma_j, f=a)<C\left\{|z_j|^{\tau}+\log\frac{1}{d}\right.$$

$$\left.+\log^+\log^+\left|\frac{f(z_0)}{8\varepsilon_j|z_j|}\right|+\log\frac{1}{\left|\dfrac{f(z_0)}{8\varepsilon_j|z_j|}, \dfrac{a}{8\varepsilon_j|z_j|}\right|}\right\}, \tag{6.3.18}$$

其中 $z_0=z_j+8\varepsilon_j|z_j|t_0$.

可以假定 $\varepsilon_j|z_j|\geqslant 1$. 因为当 Γ_j 的半径不满足这个条件时，只须将它适当放大即可. 所以由球面半径的定义有

$$\log\frac{1}{\left|\dfrac{f(z_0)}{8\varepsilon_j|z_j|}, \dfrac{a}{8\varepsilon_j|z_j|}\right|}\leqslant\log\frac{8\varepsilon_j|z_j|}{|f(z_0), a|}. \tag{6.3.19}$$

为了估计 $\log^+\log^+|f(z_0)|$，我们应用 Poisson-Jensen 公式。当 j 充分大时显然 $|z_0|<2|z_j|$，因此

$$\log^+|f(z_0)| \leqslant \frac{3|z_j|+2|z_j|}{3|z_j|-2|z_j|}m(3|z_j|,f)$$
$$+\sum_{|b_\mu|\leqslant 3|z_j|}\log\left|\frac{(3|z_j|)^2-\bar{b}_\mu z_0}{3|z_j|(z_0-b_\mu)}\right|,$$

其中 b_μ 为 $f(z)$ 在 $|z|\leqslant 3|z_j|$ 上的所有极点。

由

$$\log\left|\frac{(3|z_j|)^2-\bar{b}_\mu z_0}{3|z_j|(z_0-b_\mu)}\right| \leqslant \log\frac{(3|z_j|)^2+(3|z_j|)(2|z_j|)}{3|z_j||z_0-b_\mu|}$$
$$=\log 5|z_j|+\log\frac{1}{|z_0-b_\mu|},$$

得

$$\log^+|f(z_0)| \leqslant 5m(3|z_j|,f)+n(3|z_j|,f=\infty)\log 5|z_j|$$
$$+\sum_{|b_\mu|\leqslant 3|z_j|}\log\frac{1}{|z_0-b_\mu|}. \tag{6.3.20}$$

为了估计上式右端的最后的和数，我们回到 t 平面。命 $b_\mu = z_j+8\varepsilon_j|z_j|\beta_\mu$. 当 $|\beta_\mu|\geqslant 1$ 时，则

$$|z_0-b_\mu| = 8\varepsilon_j|z_j||t_0-\beta_\mu| \geqslant 8\varepsilon_j|z_j|(|\beta_\mu|-|t_0|)$$
$$\geqslant 8\left(1-\frac{1}{32}\right)>1.$$

于是

$$\sum_{|b_\mu|\leqslant 3|z_j|}\log\frac{1}{|z_0-b_\mu|} \leqslant \sum_{|\beta_\mu|<1}\log\frac{1}{8\varepsilon_j|z_j||t_0-\beta_\mu|}$$
$$\leqslant \sum_{|\beta_\mu|<1}\log\frac{1}{|t_0-\beta_\mu|}.$$

注意 t_0 不属于 $|t|<1$ 内 $g(t)$ 的极点与 $h=\dfrac{1}{256e}$ 的除外圆，因此

$$\prod_{|\beta_\mu|<1} |t_0 - \beta_\mu| > h^{n(1, g=\infty)}.$$

从而

$$\sum_{|b_\mu|<3|z_j|} \log \frac{1}{|z_0 - b_\mu|} < n(1, g = \infty) \log \frac{1}{h}$$

$$< Cn(3|z_j|, f = \infty). \tag{6.3.21}$$

将 (6.3.21) 代入(6.3.20)，当 j 充分大时得

$$\log^+ |f(z_0)| < C(\log |z_j|) T(4|z_j|, f) < |z_j|^{\lambda+1}.$$

即

$$\log^+ \log^+ |f(z_0)| < (\lambda + 1) \log |z_j|. \tag{6.3.22}$$

再将 (6.3.19)，(6.3.22) 代入 (6.3.18) 有

$$n(\Gamma_j, f = a) < C \left\{ |z_j|^\tau + \log \frac{1}{d} + \log |z_j| \right.$$

$$\left. + \log \frac{1}{|f(z_0), a|} \right\}.$$

于是在 Riemann 球上除去一个半径为 $e^{-|z_j|^\tau}$ 的球面圆后有

$$n(\Gamma_j, f = a) = O(|z_j|^\tau).$$

但是 $\tau < \lambda$，令 $j \to \infty$ 上式便和 $f(z)$ 以 Γ_j 为 λ 级充满圆相矛盾。

应用定理 6.5，类似于上述推理可证

定理 6.7. 设 $f(z)$于开平面亚纯，级 λ 为有穷正数．若 B：$\arg z = \theta_0$ 是 $f(z)$ 的一条 λ 级 Borel 方向，并且在角域 $|\arg z - \theta_0| < \eta_0$ $(\eta_0 > 0)$内 $f(z)$以某有穷复数 a_0 为 Borel 例外值，则 B 亦必为其各级导数的 Borel 方向．

系． 设 $f(z)$ 于开平面亚纯，级 λ 为有穷正数．若 $f(z)$ 有一个有穷的 Borel 例外值，则 $f(z)$ 与其各级导数至少有一条公共 Borel 方向．

在 §6.2 与 §6.3 里我们看到对于亚纯函数与其导数的公共 Borel 方向的问题，在附加了某些条件后已经获得一些显著成果．但是对于不附加任何条件的普遍情况，这个问题至今尚未解决．

第七章　亚纯函数的亏值与 Borel 方向

在第一章里，我们已经看到亏值是模分布论中的一个重要概念，它的定义仅与值点的模有关，而与值点的辐角无关．在第三章里研究的 Borel 方向则是辐角分布论中的基本概念．这两者之间看来似乎并无联系，然而杨乐，张广厚[2,3,4]的研究表明，如果有穷正级的亚纯函数具有亏值，则其 Borel 方向的分布必须满足某种规律，同时在亏值总数与 Borel 方向总数间存在着紧密的联系．

§7.1. 精确级与两个引理

7.1.1. 精确级

在本章的研究里，我们将要用到一个重要的工具——精确级．它最初是由 G. Valiron[1] 引进的．

定义 7.1. 设 $f(z)$ 于开平面亚纯，级 λ 为有穷正数．$\lambda(r)$称为 $T(r,f)$ 或 $f(z)$的一个精确级，若

(1) $\lambda(r)$在$[0,\infty)$上定义，且非负、连续，以及$\lim\limits_{r\to\infty}\lambda(r)=\lambda$;

(2) 除去可数个点外 $\lambda'(r)$ 存在，且$\lim\limits_{r\to\infty} r\lambda'(r)\log r=0$;

(3) 当 r 适当大时恒有 $r^{\lambda(r)}\geqslant T(r,f)$，并且存在一列趋于 ∞ 的正数 (r_j) 使 $r_j^{\lambda(r_j)}=T(r_j,f)$.

$r^{\lambda(r)}$ 称为 $T(r,f)$ 或 $f(z)$的型函数．

定理 7.1. 设函数 $f(z)$于开平面亚纯，级 λ 为有穷正数，则它存在精确级．

证．区分两种情况：

(1) 存在 r 的一列趋于∞的值使 $T(r,f)>r^{\lambda}$.

置

$$\varphi(r)=\max_{x\geq r}\frac{\log^+T(x,f)}{\log x}. \tag{7.1.1}$$

可以看出 $\varphi(r)$在$[0,\infty)$上有定义，且为非负，连续与非增的函数，$\lim\limits_{r\to\infty}\varphi(r)=\lambda$. 使得$\varphi(r)=\dfrac{\log^+T(r,f)}{\log r}$ 成立的值 r 构成无界集 M. 显然 M中的值 r 同时适合 $T(r,f)>r^\lambda$.

取 $r_1>e^{e^e}$, $r_1\in M$ 以及 $t_1>1+r_1$, 且 t_1 是使得 $\varphi(r_1)>\varphi(t_1)$的最小整数. 当 $0\leqslant r\leqslant t_1$ 时，置 $\lambda(r)=\varphi(r_1)$.

考察[1)]

$$y_1(x)=\lambda(r_1)-\log_3 x+\log_3 t_1 \qquad (x\geqslant t_1),$$

$$y_2(x)=\varphi(x) \qquad (x\geqslant t_1).$$

由于 $y_1(t_1)=\lambda(r_1)=\varphi(r_1)>\varphi(t_1)=y_2(t_1)$, $\lim\limits_{x\to\infty}y_1(x)=-\infty$, 所以曲线 $y=y_1(x)$ 与 $y=y_2(x)$在 $x>t_1$ 时必有交点，命 u_1 为第一个交点的横坐标.

当 $t_1\leqslant r\leqslant u_1$ 时，置 $\lambda(r)=\lambda(r_1)-\log_3 r+\log_3 t_1$. 在此区间上有 $\lambda(r)\geqslant\varphi(r)$,且等号仅在 $r=u_1$ 时成立.

取 $r_2=\min\{M\cap[u_1,\infty)\}$. 若 $r_2>u_1$, 则在$u_1\leqslant r\leqslant r_2$时置 $\lambda(r)=\varphi(r)$. 当 $u_1\leqslant r\leqslant r_2$ 时，根据 r_2 的取法 $\varphi(r)$为常数，于是 $\lambda(r)$亦为常数. 从 r_2 开始重复上述过程，并且无限地继续下去. 注意由

$$r_j-r_{j-1}\geqslant u_{j-1}-r_{j-1}\geqslant t_{j-1}-r_{j-1}\geqslant 1,$$

有$\lim\limits_{j\to\infty}r_j=\infty$,从而 $\lambda(r)$在$[0,\infty)$上定义妥贴.

$\lambda(r)$是$[0,\infty)$上的连续函数，非负. 除去在 t_j,u_j 外$\lambda'(r)$存在，并且在每个小区间上或者 $\lambda'(r)=0$ 或者 $\lambda'(r)=-\dfrac{1}{r\log r\log_2 r}$, 于是$\lim\limits_{r\to\infty}r\lambda'(r)\log r=0$.

---

1) 这里及以下用 $\log_2\alpha$ 表示 $\log\log\alpha$，用 $\log_3\alpha$ 表示 $\log\log\log\alpha$.

当 $r \geqslant r_1$ 时有 $\lambda(r) \geqslant \varphi(r) \geqslant \dfrac{\log^+ T(r,f)}{\log r}$，并且

$$\lambda(r_j) = \varphi(r_j) = \frac{\log^+ T(r_j,f)}{\log r_j} \qquad (j = 1, 2, \cdots).$$

$\lambda(r)$是非增的函数，因此$\lim\limits_{r\to\infty}\lambda(r) = \lim\limits_{r\to\infty}\varphi(r) = \lambda$.

(2) 当 r 适当大时恒有 $T(r,f) \leqslant r^\lambda$. 倘若存在一列趋于$\infty$的正数$(r_j)$使得 $T(r_j,f) = r_j^\lambda$, 则取 $\lambda(r) \equiv \lambda$ 即合要求. 以下仅需考虑当 $r \geqslant r_0 > e^{e^e}$ 时恒有 $T(r,f) < r^\lambda$ 的情况.

置

$$\psi(r) = \max_{r_0 \leqslant x \leqslant r} \frac{\log^+ T(x,f)}{\log x}. \tag{7.1.2}$$

显然 $\psi(r)$是连续，非减的函数，并且使 $\psi(r) = \dfrac{\log^+ T(r,f)}{\log r}$的值 r 构成一个无界集 L.

存在充分大的正数 $r_1 > r_0$ 使得如果以 s_1 表示曲线

$$y_1(x) = \lambda + \log_3 x - \log_3 r_1, \quad y_2(x) = \psi(x)$$

的交点的最大横坐标，则有 $r_0 < s_1 < r_1$ 以及 $L \cap [r_0, s_1] \neq \varnothing$. 置

$$t_1 = \max\{L \cap [r_0, s_1]\},$$

则 $r_0 \leqslant t_1 \leqslant s_1 < r_1$.

又存在充分大的正数 $r_2 > r_1 + 1$，使得如果以 s_2 表示曲线

$$y_1(x) = \lambda + \log_3 x - \log_3 r_2, \qquad y_2(x) = \psi(x)$$

的交点的最大横坐标，则有 $r_1 < s_2$ 以及 $L \cap [r_1, s_2] \neq \varnothing$. 置

$$t_2 = \max\{L \cap [r_1, s_2]\}.$$

再记 u_1 为$[s_1, r_1]$上一点使得 $\lambda + \log_3 u - \log_3 r_1 = \psi(t_2)$，于是 $r_0 \leqslant t_1 \leqslant s_1 \leqslant u_1 \leqslant r_1 < t_2 \leqslant s_2 \leqslant \cdots$.

命

$$\lambda(r) = \begin{cases} \psi(t_1) & 0 \leqslant r \leqslant s_1, \\ \lambda + \log_3 r - \log_3 r_1 & s_1 \leqslant r \leqslant u_1, \\ \psi(t_2) & u_1 \leqslant r \leqslant s_2, \\ \cdots & \cdots \end{cases}$$

根据 t_j, u_j 的取法可以看出 $\lambda(r)$是连续，非负的函数. 并且有

$$\lambda(r) \geqslant \psi(r) \geqslant \frac{\log^+ T(r,f)}{\log r}$$

以及

$$\lambda(t_j) = \psi(t_j) = \frac{\log^+ T(t_j,f)}{\log t_j}.$$

除去 s_j, u_j 外 $\lambda'(r)$ 存在，并且 $\lim\limits_{r\to\infty} r\lambda'(r)\log r = 0$.

7.1.2. 两个引理

我们建立两个引理，它们在本章的论证中起着重要作用.

引理 7.1.[1] 设函数 $f(z)$于开平面亚纯，级 λ 为有穷正数，并设 $a_\nu(\nu = 1, 2, \cdots, p;\ 1 \leqslant p < \infty)$ 为一组互相判别的复数，且 $\delta(a_\nu, f) = \delta_\nu > 0(\nu = 1, 2, \cdots, p)$. 若 $\lambda(r)$ 为 $f(z)$的一精确级，置 $U(r) = r^{\lambda(r)}$ 以及记 $\delta = \min\limits_{1\leqslant\nu\leqslant p} \delta_\nu$, 则必存在一列正数 $R_j(j = 1, 2, \cdots)$, $\lim\limits_{j\to\infty} R_j = \infty$, 对于每个充分大的 j 和 $\nu = 1, 2, \cdots, p$ 使

$$\begin{cases} \log \dfrac{1}{|f(R_je^{i\varphi}) - a_\nu|} > \dfrac{\delta}{2^{\lambda+4}}U(R_j) & \text{当 } a_\nu \neq \infty \text{ 时}, \\ \log |f(R_je^{i\varphi})| > \dfrac{\delta}{2^{\lambda+4}} U(R_j) & \text{当 } a_\nu = \infty \text{ 时} \end{cases} \tag{7.1.3}$$

成立的值 $\varphi(0 \leqslant \varphi < 2\pi)$ 构成的集 $E_{j\nu}$ 的测度

$$\mathrm{mes}E_{j\nu} > K(\delta, p, \lambda) > 0. \tag{7.1.4}$$

于此 $K(\delta, p, \lambda)$表示仅依赖于 δ, p, λ 的正数，例如可取

$$K(\delta, p, \lambda) = \frac{\delta\pi}{\left(5 + \dfrac{\log 25pe}{\log \dfrac{4}{3}}\right)4^{\lambda+2}}. \tag{7.1.5}$$

---

1) 从下章定理 8.4 的展布关系立即可推出引理 7.1，但是这里不需要展布关系确定的精确的下界，证明也要简单得多.

证. 根据 $\lambda(r)$的性质,可以选取一列正数 $r_j(j=1,2,\cdots)$, $\lim\limits_{j\to\infty} r_j=\infty$,使

$$\lim_{j\to\infty}\frac{T(r_j,f)}{U(r_j)}=1.$$

对于每个固定的 j,考察函数 $\frac{1}{f(z)-a_\nu}$[1] $(\nu=1,2,\cdots,p)$. 在 $|z|\leqslant 3r_j$ 上 $\frac{1}{f(z)-a_\nu}$ 的极点记为 $b_{\nu l}(l=1,2,\cdots,n(3r_j,f=a_\nu))$, 对它们应用 Boutroux-Cartan 定理, 则当点 z 位于至多 $n(3r_j,f=a_\nu)$ 个且半径总和不超过 $\frac{2eh}{p}r_j$ 的圆$(\gamma)_\nu$ 外有

$$\prod_{l=1}^{n(3r_j,f=a_\nu)}|z-b_{\nu l}|>\left(\frac{h}{p}r_j\right)^{n(3r_j,f=a_\nu)}\quad(\nu=1,2,\cdots,p).$$

于此,我们取 $h=\frac{1}{5e}$,并记 $(\gamma)=\bigcup\limits_{\nu=1}^{p}(\gamma)_\nu$.

在圆环 $r_j\leqslant|z|\leqslant 2r_j$ 上且在(γ)外存在圆周$|z|=R_j$, 对此圆周上的任意点 z 有

$$\begin{aligned}\log\frac{1}{|f(z)-a_\nu|}&\leqslant\frac{3r_j+R_j}{3r_j-R_j}m\left(3r_j,\frac{1}{f-a_\nu}\right)\\&\quad+\sum_{l=1}^{n(3r_j,f=a_\nu)}\log\left|\frac{(3r_j)^2-\bar{b}_{\nu l}z}{3r_j(z-b_{\nu l})}\right|\\&\leqslant 5m\left(3r_j,\frac{1}{f-a_\nu}\right)+n(3r_j,f=a_\nu)\log 5r_j\\&\quad+\log\frac{1}{\left(\frac{h}{p}r_j\right)^{n(3r_j,f=a_\nu)}}\leqslant 5m\left(3r_j,\frac{1}{f-a_\nu}\right)\\&\quad+\frac{\log\frac{5p}{h}}{\log\frac{4}{3}}N\left(4r_j,\frac{1}{f-a_\nu}\right)\leqslant KT\left(4r_j,\frac{1}{f-a_\nu}\right),\end{aligned}\tag{7.1.6}$$

1) 当 $a_\nu=\infty$ 时,则考察 $f(z)$.

其中 $K = 5 + \dfrac{\log 25pe}{\log \dfrac{4}{3}}$。

考虑集合

$$E_{j\nu}^{*} = E\left\{\varphi: 0 \leqslant \varphi < 2\pi,\ \log^{+}\frac{1}{|f(R_j e^{i\varphi}) - a_\nu|}\right.$$
$$\left. > \frac{1}{2} m\left(R_j,\ \frac{1}{f - a_\nu}\right)\right\}. \tag{7.1.7}$$

以 $CE_{j\nu}^{*}$ 表示它关于 $[0, 2\pi)$ 的余集，则由(7.1.6)与(7.1.7)有

$$m\left(R_j,\ \frac{1}{f - a_\nu}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{E_{j\nu}^{*}} \log^{+}\frac{1}{|f(R_j e^{i\varphi}) - a_\nu|}\, d\varphi$$
$$+ \frac{1}{2\pi}\int_{CE_{j\nu}^{*}} \log^{+}\frac{1}{|f(R_j e^{i\varphi}) - a_\nu|}\, d\varphi$$
$$\leqslant \frac{1}{2\pi} K T\left(4r_j,\ \frac{1}{f - a_\nu}\right) \operatorname{mes} E_{j\nu}^{*} + \frac{1}{2} m\left(R_j,\ \frac{1}{f - a_\nu}\right).$$

即

$$m\left(R_j,\ \frac{1}{f - a_\nu}\right) \leqslant \frac{K}{\pi} T\left(4r_j,\ \frac{1}{f - a_\nu}\right) \operatorname{mes} E_{j\nu}^{*},$$
$$(\nu = 1, 2, \cdots, p). \tag{7.1.8}$$

当 j 充分大时，一方面由假设 $\delta(a_\nu, f) = \delta_\nu \geqslant \delta$，有

$$m\left(R_j,\ \frac{1}{f - a_\nu}\right) > \frac{\delta_\nu}{2} T(R_j, f) \geqslant \frac{\delta_\nu}{2} T(r_j, f) > \frac{\delta}{4} U(r_j); \tag{7.1.9}$$

另一方面由

$$T\left(4r_j,\ \frac{1}{f - a_\nu}\right) = T(4r_j, f - a_\nu) + \log\frac{1}{|f(0) - a_\nu|}$$
$$\leqslant T(4r_j, f) + \log^{+}|a_\nu| + \log\frac{1}{|f(0) - a_\nu|} + \log 2 \text{ [1)]}$$
$$(\nu = 1, 2, \cdots, p),$$

---

1) 当 $f(0) = a_\nu$ 时，则需以 $\log\dfrac{1}{|C_k|}$ 代替 $\log\dfrac{1}{|f(0) - a_\nu|}$，其中 C_k 为 $f(z)$ 在原点 Taylor 展式中的第一个非零系数。

并结合精确级的性质可知

$$T\left(4r_i, \frac{1}{f-a_\nu}\right) < 2U(4r_i) < 4^{\lambda+1}U(r_i)$$

$$(\nu = 1, 2, \cdots, p). \qquad (7.1.10)$$

于是

$$\operatorname{mes} E_{j\nu}^* > K(\delta, p, \lambda) = \frac{\delta\pi}{\left(5 + \dfrac{\log 25pe}{\log \dfrac{4}{3}}\right)4^{\lambda+2}} > 0$$

$$(\nu = 1, 2, \cdots, p). \quad (7.1.11)$$

对于集合 $E_{j\nu}^*$ 内的值 φ 有

$$\log \frac{1}{|f(R_je^{i\varphi}) - a_\nu|} > \frac{1}{2} m\left(R_j, \frac{1}{f-a_\nu}\right)$$

$$> \frac{\delta_\nu}{8} U(r_j) \geqslant \frac{\delta}{2^{\lambda+4}} U(R_j).$$

即 $E_{j\nu}^* \subset E_{j\nu}$，引理遂得证.

引理 7.2. 设 $f(z)$ 于开平面亚纯，级 λ 为有穷正数. 又设 B_1: $\arg z = \varphi_1$, B_2: $\arg z = \varphi_2$, $0 \leqslant \varphi_1 < \varphi_2 \leqslant 2\pi + \varphi_1$，为由原点发出的两条半直线，在角域 $\varphi_1 < \arg z < \varphi_2$ 内不含有 $f(z)$ 的 Borel 方向. 若存在一列正数 R_j, $\lim\limits_{j\to\infty} R_j = \infty$ 以及一复数 a_0（有穷或否），使得对于任意正数 ε 当 j 充分大时在弧段 A_j: $\{R_je^{i\varphi}$: $\varphi_1 < \varphi < \varphi_2\}$ 上适合不等式

$$\begin{cases} \log \dfrac{1}{|f(R_je^{i\varphi}) - a_0|} > R_j^{\lambda-\varepsilon} & \text{若 } a_0 \neq \infty, \\ \log |f(R_je^{i\varphi})| > R_j^{\lambda-\varepsilon} & \text{若 } a_0 = \infty \end{cases} \qquad (7.1.12)$$

的值 φ 构成集合 E_j，测度大于正数 K_1（不依赖于 ε），则对于给定的正数 K_2 与充分小的正数 α，可得一列曲线段 $L_j(j > j_0)$ 适合下述条件：

(1) L_j 位于区域 $\varphi_1 + 8\alpha \leqslant \arg z \leqslant \varphi_2 - 8\alpha$, $R_j - 1 \leqslant |z|$

$\leqslant R_j$ 上，其端点分别为 $R_je^{i(\varphi_1+\alpha_j')}$ 与 $R_je^{i(\varphi_2-\alpha_j')}(8\alpha\leqslant\alpha_j'\leqslant 9\alpha)$. 并且弧段 A_j 上的点而不属于 L_j 者，其辐角 φ 的值构成集合，测度小于 K_2，即

$$\mathrm{mes}\{\varphi: R_je^{i\varphi}\in A_j-L_j\}<K_2. \tag{7.1.13}$$

（2）对于任意小的正数 η，当 j 充分大以及 $z\in L_j$ 时有不等式

$$\begin{cases}\log\dfrac{1}{|f(z)-a_0|}>R_j^{\lambda-\eta} & 当\ a_0\neq\infty,\\ \log|f(z)|>R_j^{\lambda-\eta} & 当\ a_0=\infty.\end{cases} \tag{7.1.14}$$

证. 无妨设 $a_0=\infty$，否则考虑 $\dfrac{1}{f(z)-a_0}$ 即可.

取 $0<\alpha<\dfrac{1}{32}\min(K_1,K_2)$. 在区域 $G:\varphi_1+8\alpha\leqslant\arg z\leqslant\varphi_2-8\alpha$ 上使

$$\log|f(R_je^{i\varphi})|>R_j^{\lambda-\varepsilon} \tag{7.1.15}$$

成立的值 φ 构成集合 E_j 有 $\mathrm{mes}E_j>\dfrac{K_1}{2}$.

我们将区域 G 分为 $N=\left[\dfrac{\pi}{\alpha}\right]+1$ 等分 $G_\nu(\nu=1,2,\cdots,N)$，每个 G_ν 的开度不超过 2α. 其中至少存在一个小角域 $G_{j\nu_0}$，使得 $G_{j\nu_0}$ 内满足(7.1.15)的值 φ 构成集合 $E_{j\nu_0}$ 有

$$\mathrm{mes}E_{j\nu_0}\geqslant\frac{K_1}{2N}\geqslant\frac{\alpha}{2(\pi+\alpha)}K_1.$$

由于 B_1 与 B_2 之间不含有 $f(z)$ 的 Borel 方向，于是由定理 3.10 可以找到三个互相判别的复数 $\beta_l(l=1,2,3)$ 与 τ, $0<\tau<\lambda$，使当 r 充分大时有

$$\sum_{l=1}^{3}n\{(|z|\leqslant r)\cap(\varphi_1+\alpha\leqslant\arg z\leqslant\varphi_2-\alpha),f=\beta_l\}<r^\tau.$$

记

$$\mathfrak{N}_j=\sum_{l=1}^{3}n\{(|z|\leqslant(1+6\alpha)R_j)\cap(\varphi_1+\alpha\leqslant\arg z\leqslant\varphi_2-\alpha),$$

$$f=\beta_l\}+n\{(|z|\leqslant(1+6\alpha)R_j)\cap(\varphi_1+\alpha$$
$$\leqslant \arg z\leqslant\varphi_2-\alpha),f=\infty\}.$$

当 j 充分大时显然 $\mathfrak{N}_j<R_j^{2+\varepsilon}$.

取 $h\leqslant\min\left(\frac{K_2}{8},\ \frac{\alpha}{8(\pi+\alpha)}K_1\right)\leqslant\frac{1}{4}\operatorname{mes}E_{j\nu_0}$. 在区域

$$(|z|\leqslant(1+6\alpha)R_j)\cap(\varphi_1+\alpha\leqslant\arg z\leqslant\varphi_2-\alpha)$$

上,以 $f(z)$的每个 $\beta_l(l=1,2,3)$值点与极点为圆心,以 $\frac{h}{\mathfrak{N}_j+1}$ 为半径作除外圆,其全体记为$(\gamma)_j$. 考虑$|z|=R_j$ 在G内的部分,若它与$(\gamma)_j$ 中的小圆相交,则以$(\gamma)_j$ 在$|z|\leqslant R_j$ 内的小弧段替代相交部分,这样得曲线段 L_j. 当 j 充分大时 L_j 位于区域$(\varphi_1+8\alpha\leqslant\arg z\leqslant\varphi_2-8\alpha)\cap(R_j-1\leqslant|z|\leqslant R_j)$上. 又由于除外圆半径总和 $<h\leqslant\frac{\alpha}{4}$, 所以必定存在 α_j', $8\alpha\leqslant\alpha_j'\leqslant9\alpha$, 使 $R_je^{i(\varphi_1+\alpha_j')}$ 与 $R_je^{i(\varphi_2-\alpha_j')}$ 均位于除外圆$(\gamma)_j$外. 同时集 A_j-L_j 内的点位于角域 $\varphi_1<\arg z<\varphi_1+9\alpha$ 或 $\varphi_2-9\alpha<\arg z<\varphi_2$ 或除外圆$(\gamma)_j$ 内,所以当 j 充分大时

$$\operatorname{mes}\{\varphi:R_je^{i\varphi}\in A_j-L_j\}<4h+18\alpha<K_2.$$

余下仅需证明引理结论的第(2)点,命 $G_{j\nu_0}$ 的平分角线与$|z|=R_j$ 的交点为 z_0(z_0 与以下的 z_1, z_2 均与 j 有关,为简化符号将下标 j 省略),则在圆 $\Gamma_j:|z-z_0|\leqslant\alpha R_j$ 内并在 L_j 上必存在点 z_1 使

$$\log|f(z_1)|>R_j^{2-\varepsilon}.$$

若 Γ_j 内且在 L_j 上的任意点为 z_2, 则

$$\log|f(z_1)|\leqslant\frac{3\alpha R_j+2\alpha R_j}{3\alpha R_j-2\alpha R_j}m(3\alpha R_j,z_2,f)$$

$$+\sum_l\log\left|\frac{(3\alpha R_j)^2-\overline{(\beta_l-z_2)}(z_1-z_2)}{3\alpha R_j(\beta_l-z_1)}\right|$$

$$\leqslant5m(3\alpha R_j,z_2,f)+n(3\alpha R_j,z_2,f)$$

$$\times \left\{\log \frac{\mathfrak{N}_i + 1}{h} + \log 6\alpha R_i\right\} < C(\log R_i) T(4\alpha R_i, z_2, f),$$

其中 C 为依赖于 λ, α, K_1, K_2 的常数.

应用引理 6.6，当 i 充分大时有

$$T(4\alpha R_i, z_2, f) < T\left(4\alpha R_i, z_2, \frac{f-\beta_1}{f-\beta_3}\cdot\frac{\beta_2-\beta_3}{\beta_2-\beta_1}\right)$$

$$+ \log|f(z_2)-\beta_3| + C$$

$$< C\left(\sum_{l=1}^{3} n(5\alpha R_i, z_2, f=\beta_l) + 1\right)$$

$$\times \left\{\log \frac{(\mathfrak{N}_i + 1)\left(\sum_{l=1}^{3} n(5\alpha R_i, z_2, f=\beta_l) + 1\right)}{h}\right.$$

$$\left. + \log(5\alpha R_i) + 10\right\} + \log^+ \left|\frac{f(z_2)-\beta_1}{f(z_2)-\beta_3}\right|$$

$$+ \log|f(z_2)-\beta_3| + C.$$

再由

$$n(5\alpha R_i, z_2, f=\beta_l)$$
$$\leqslant n\{(|z| \leqslant (1+6\alpha)R_i) \cap (\varphi_1 + \alpha \leqslant \arg z \leqslant \varphi_2 - \alpha), f=\beta_l\}$$
$$< (1+6\alpha)^\tau R_i^\tau,$$

最后便得

$$R_i^{\lambda-\varepsilon} < \log|f(z_1)|$$
$$< C\log R_i(R_i^\lambda \log R_i + 2\log^+|f(z_2)|).$$

于是当 i 充分大时有

$$\log|f(z_2)| > R_i^{\lambda-2\varepsilon}.$$

在 G 内使 Γ_i 的圆心保持在圆周 $|z| = R_i$ 上，而顺次移动 Γ_i，每次转动 α 角，至多转动 $2N$ 次，得到总数不超过 $2N$ 的圆组成的圆链，复盖了曲线段 L_i，则如上逐次递推后可知，对于 L_i 上的任意点当 i 充分大时有

$$\log|f(z)| > R_i^{\lambda-(2N+1)\varepsilon} > R_i^{\lambda-\eta}. \tag{7.1.16}$$

§7.2. 亚纯函数具有亏值时 Borel 方向的分布

7.2.1. 主要结果

在 § 6.1 里我们已经看到，对于有穷正级亚纯函数 $f(z)$，其 Borel 方向与单位圆周的交点构成非空、闭集，此外就不再服从任何其他规律．但是当 $f(z)$ 具有亏值时情形就很不相同了，杨乐，张广厚[2]曾获得下述结果．

定理 7.2. 设 $f(z)$于开平面亚纯，级 λ 为有穷正数．若 $f(z)$以 a_0(有穷或否)为亏值，则当 $f(z)$的 Borel 方向多于一条时，必存在两条 Borel 方向，其夹角不超过 $\frac{\pi}{\lambda}$；当 $f(z)$ 仅有一条 Borel 方向时，必有 $\lambda \leqslant \frac{1}{2}$.

证．不妨命 $a_0=\infty$，否则仅需考虑函数 $\frac{1}{f(z)-a_0}$.

若 $f(z)$有无穷条 Borel 方向(可数或否)，则这些方向至少有一条极限方向，因而对于任意 $\varepsilon>0$，存在两条 Borel 方向，其夹角不超过 ε．这时定理的结论显然成立．

若 $f(z)$有 $q(1<q<\infty)$ 条 Borel 方向，根据引理 7.1 存在两条相邻的方向 $B_{m_0}: \arg z=\varphi_{m_0}$, $B_{m_0+1}: \arg z=\varphi_{m_0+1}$ 与一列正数[1)] R_j 使得对于每个充分大的 j，适合关系式

$$\log|f(R_je^{i\varphi})| \geqslant \frac{\delta(a_0, f)}{2^{\lambda+4}} U(R_j) \tag{7.2.1}$$

与

$$\varphi_{m_0}<\varphi<\varphi_{m_0+1}$$

的值 φ 组成的集合，其测度大于 $\frac{1}{q}K(\delta, 1, \lambda)$．再应用引理 7.2，存在一列曲线段 L_j 适合该引理所述的结论．

---

1) 这里的一列正数实际上是引理 7.1 的正数序列(R_j)的子序列，为使符号简化仍记为(R_j).

倘若 B_{m_0} 与 B_{m_0+1} 的夹角不超过 $\frac{\pi}{\lambda}$，则定理的结论已经成立。若其夹角大于 $\frac{\pi}{\lambda}$，我们将由此出发导致矛盾。

不妨设 $\varphi_{m_0+1}=-\varphi_{m_0}(\varphi_{m_0+1}>0)$，否则置

$$\tau = ze^{-i\frac{\varphi_{m_0}+\varphi_{m_0+1}}{2}}$$

便可化为所述情况. 取充分小的正数 α 使

$$\varphi_{m_0+1}-\varphi_{m_0}-2\alpha>\frac{\pi}{\lambda}.$$

若置

$$\varphi_{m_0+1}-\alpha=\frac{k}{2}\pi,\ \text{则}\ k\pi>\frac{\pi}{\lambda}.$$

再取数 b, $1<b<2$, 且 $f(b)\neq\infty$. 作变换

$$\zeta=\frac{z^{\frac{1}{k}}-b^{\frac{1}{k}}}{z^{\frac{1}{k}}+b^{\frac{1}{k}}},\tag{7.2.2}$$

它将角域 $D:\varphi_{m_0}+\alpha<\arg z<\varphi_{m_0+1}-\alpha$ 映为圆 $|\zeta|<1$.

设 L_j 上任意点为 z，其像点 ζ 应适合

$$|\zeta|=\left|\frac{|z|^{\frac{1}{k}}e^{i\frac{\varphi}{k}}-b^{\frac{1}{k}}}{|z|^{\frac{1}{k}}e^{i\frac{\varphi}{k}}+b^{\frac{1}{k}}}\right|$$

$$=\left\{1-\frac{4|z|^{\frac{1}{k}}b^{\frac{1}{k}}\cos\frac{\varphi}{k}}{|z|^{\frac{2}{k}}+2|z|^{\frac{1}{k}}b^{\frac{1}{k}}\cos\frac{\varphi}{k}+b^{\frac{2}{k}}}\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

计及 $|\varphi|\leqslant\varphi_{m_0+1}-\alpha_j'\leqslant\varphi_{m_0+1}-8\alpha=k\left(\frac{\pi}{2}-\frac{7}{k}\alpha\right)$，则

$$|\zeta|\leqslant\left\{1-\frac{4|z|^{\frac{1}{k}}b^{\frac{1}{k}}\sin\frac{7}{k}\alpha}{(|z|^{\frac{1}{k}}+b^{\frac{1}{k}})^2}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant\left\{1-|z|^{-\frac{1}{k}}\sin\frac{7}{k}\alpha\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant 1-\frac{1}{2}|z|^{-\frac{1}{k}}\sin\frac{7}{k}\alpha$$

$$\leqslant 1-\frac{\sin\frac{7}{k}\alpha}{2}R_j^{-\frac{1}{k}}.$$

取

$$r_j = 1-\frac{\sin\frac{7}{k}\alpha}{2}R_j^{-\frac{1}{k}}, \tag{7.2.3}$$

L_j 在变换(7.2.2)下的象 l_j 便位于$|\zeta|\leqslant r_j$ 内。

(7.2.2)的逆变换为

$$z = b\left(\frac{1+\zeta}{1-\zeta}\right)^k.$$

置 $g(\zeta)=f(z(\zeta))$. 由于 B_{m_0} 与 B_{m_0+1} 之间不存在 $f(z)$的 Borel 方向，根据定理 3.10 存在三个互相判别的复数 $\beta_\nu(\nu=1,2,3)$以及数$\tau(0<\tau<\lambda)$，当R充分大时 $f(z)$在扇形 $D(R)$:$(|z|\leqslant R)\cap(\varphi_{m_0}+\alpha\leqslant\arg z\leqslant\varphi_{m_0+1}-\alpha)$内有

$$\sum_{\nu=1}^{3} n\{D(R), f=\beta_\nu\}<R^\tau.$$

可以选取 τ 使满足 $1<k\tau<k\lambda$.

当$|\zeta|\leqslant r$ 时有$|z|\leqslant b\frac{2^k}{(1-r)^k}$. 因此

$$\sum_{\nu=1}^{3} n(|\zeta|\leqslant r, g=\beta_\nu)\leqslant$$

$$\sum_{\nu=1}^{3} n\left\{D\left(b\frac{2^k}{(1-r)^k}\right),\ f=\beta_\nu\right\}<(2^k b)^\tau\left(\frac{1}{1-r}\right)^{k\tau}.$$

即对于任意 $\varepsilon>0$ 恒有

$$\int_{r_0}^{1}\sum_{\nu=1}^{3} n(r, g=\beta_\nu)(1-r)^{k\tau-1+\varepsilon}dr<\infty.$$

注意 $k\tau>1$，由

$$(k\tau - 1 + \varepsilon)\int_{r_0}^{r}\sum_{\nu=1}^{3} N(t, g = \beta_\nu)(1 - t)^{k\tau-2+\varepsilon}dt$$

$$= (1 - r_0)^{k\tau-1+\varepsilon}\sum_{\nu=1}^{3} N(r_0, g = \beta_\nu) - (1 - r)^{k\tau-1+\varepsilon}$$

$$\times \sum_{\nu=1}^{3} N(r, g = \beta_\nu) + \int_{r_0}^{r}\sum_{\nu=1}^{3} n(t, g = \beta_\nu)$$

$$\times (1 - t)^{k\tau-1+\varepsilon}\frac{dt}{t},$$

有

$$\int_{r_0}^{1}\sum_{\nu=1}^{3} N(r, g = \beta_\nu)(1 - r)^{k\tau-2+\varepsilon}dr < \infty.$$

再由 R. Nevanlinna 第二基本定理可知，

$$\int_{r_0}^{1} T(r, g)(1 - r)^{k\tau-2+\varepsilon}dr < \infty. \tag{7.2.4}$$

即在$|\zeta| < 1$内 $g(\zeta)$ 的级不得超过 $k\tau - 1$.

另一方面置

$$\mathfrak{N}_j = n\left(\frac{1 + r_j}{2},\ g = \infty\right),\quad h_j = \frac{1 - r_j}{4},$$

以 $g(\zeta)$在 $|\zeta| \leqslant \dfrac{1 + r_j}{2}$ 的每个极点为圆心，以 $\dfrac{h_j}{\mathfrak{N}_j + 1}$ 为半径作除外圆$(\gamma)_j$，其半径总和小于 h_j.

在 l_j 上必存在点 ζ_2(ζ_2 与以下的 ζ_1 都依赖于 j，为了简化符号，将下标 j 省略)，不属于$(\gamma)_j$. 事实上，L_j 的端点

$$R_j e^{i(-\varphi_{m_0+1}+\alpha_j')},\qquad R_j e^{i(\varphi_{m_0+1}-\alpha_j')}$$

在变换(7.2.2)下的象点分别为 ζ_1, $\bar{\zeta}_1$, 则

$$|\zeta_1 - \bar{\zeta}_1| = \left|\frac{2R_j^{\frac{1}{k}}b^{\frac{1}{k}}\left(e^{i\frac{\varphi_{m_0+1}-\alpha_j'}{k}} - e^{i\frac{-\varphi_{m_0+1}+\alpha_j'}{k}}\right)}{R_j^{\frac{2}{k}} + R_j^{\frac{1}{k}}b^{\frac{1}{k}}\left(e^{i\frac{\varphi_{m_0+1}-\alpha_j'}{k}} + e^{i\frac{-\varphi_{m_0+1}+\alpha_j'}{k}}\right) + b^{\frac{2}{k}}}\right|$$

$$\geqslant \frac{4R_j^{\frac{1}{k}} b^{\frac{1}{k}} \cos\frac{8\alpha}{k}}{(R_j^{\frac{1}{k}} + b^{\frac{1}{k}})^2} \geqslant \frac{R_j^{-\frac{1}{k}}}{2} > 4h_j. \tag{7.2.5}$$

对于点 ζ_2 应用 Poisson-Jensen 公式

$$\log|g(\zeta_2)| \leqslant \frac{\frac{1+r_j}{2} + r_j}{\frac{1+r_j}{2} - r_j} m\left(\frac{1+r_j}{2}, g\right)$$

$$+ \sum_\nu \log\left|\frac{\left(\frac{1+r_j}{2}\right)^2 - \bar{b}_\nu \zeta_2}{\frac{1+r_j}{2}(\zeta_2 - b_\nu)}\right| \leqslant \frac{4}{1-r_j} m\left(\frac{1+r_j}{2}, g\right)$$

$$+ n\left(\frac{1+r_j}{2}, g=\infty\right) \log\frac{2(\mathfrak{N}_j+1)}{h_j},$$

其中

$$b_\nu\left(\nu = 1, 2, \cdots, n\left(\frac{1+r_j}{2}, g=\infty\right)\right)$$

为 $g(\zeta)$在 $|\zeta| \leqslant \frac{1+r_j}{2}$ 上的极点. 计及

$$n\left(\frac{1+r_j}{2}, g=\infty\right) < \frac{4}{1-r_j} T\left(\frac{3+r_j}{4}, g\right)$$

与 j 充分大时,对于 $\varepsilon > 0$ 有

$$\mathfrak{N}_j \leqslant n\left\{\left(|z| \leqslant b\frac{4^k}{(1-r_j)^k}\right) \cap (\varphi_{m_0} + \alpha \leqslant \arg z\right.$$

$$\left.\leqslant \varphi_{m_0+1} - \alpha), f = \infty\right\} < \frac{1}{(1-r_j)^{k\lambda+\varepsilon}},$$

当 j 充分大时有

$$\log|g(\zeta_2)| < \frac{C}{1-r_j}\left(\log\frac{1}{1-r_j}\right) T\left(\frac{3+r_j}{4}, g\right). \tag{7.2.6}$$

但由(7.2.1)

$$\log|g(\zeta_2)| > R_j^{\lambda-\eta} = \left(\frac{\sin\frac{7}{k}\alpha}{2(1-r_j)}\right)^{k(\lambda-\eta)},$$

于是有

$$T\left(\frac{3+r_j}{4}, g\right) > C\left(\frac{1}{1-r_j}\right)^{k\lambda-1-k\eta}\frac{1}{\log\frac{1}{1-r_j}}. \qquad (7.2.7)$$

即在$|\zeta| < 1$内，$g(\zeta)$的级不低于 $k\lambda - 1$.

因此 $k\tau - 1 \geqslant k\lambda - 1$，即$\tau \geqslant \lambda$，与原设$\tau < \lambda$相矛盾. 这样便证明了 B_{m_0} 与 B_{m_0+1} 的夹角不超过 $\frac{\pi}{\lambda}$.

最后当$f(z)$仅有一条 Borel 方向 B_1: $\arg z = \varphi_1 (0 \leqslant \varphi_1 < 2\pi)$ 时，不妨命$\varphi_1 = \pi$. 若 $\lambda \leqslant \frac{1}{2}$，则定理结论已成立；若 $\lambda > \frac{1}{2}$，则在角域$|\arg z| < \pi - \alpha$内考虑，置$\pi - \alpha = \frac{k}{2}\pi$，取$\alpha$充分小，使$k\pi > \frac{\pi}{\lambda}$，完全类似以上的证明，便可推得矛盾. 于是定理得证.

7.2.2. 讨论

由定理 7.2 立即有

系. 设 $f(z)$ 为于开平面亚纯的有穷正级函数，且具有一个亏值. 若级λ大于$\frac{1}{2}$，则其 Borel 方向至少有两条，且在这些方向中存在两条，夹角不超过 $\frac{\pi}{\lambda}$.

从这个系也可以推出定理 7.2，因此定理 7.2 与系是等价的. 上述系包含了 G. Valiron[4] 与 M. L. Cartwright 的下述结果：

若有穷正级整函数 $f(z)$ 的级λ大于 $\frac{1}{2}$，则其 Borel 方向至少有两条.

定理 7.2 中函数 $f(z)$ 有一个亏值的条件可以替换为 $f(z)$ 有一个 Borel 例外值.

定理 7.3. 设 $f(z)$ 于开平面亚纯，其级 λ 为有穷正数，若 $f(z)$ 以某值 a_0 (有穷或否)为 Borel 例外值，则定理7.2结论也成立.

事实上，定理 7.2 假定了 $f(z)$ 以 a_0 为亏值，只是由于应用了引理 7.1，而引理 7.1 的证明仅在 (7.1.9) 中用了这个条件. 当 $f(z)$ 以 a_0 为 Borel 例外值时，不妨命 $a_0=\infty$. 这时在引理 7.1 的证明中代替(7.1.9)作如下考虑.

当 j 充分大时存在 $0<\tau<\lambda$ 使

$$N(R_j, f)<R_j^\tau<(2r_j)^\tau<\frac{1}{4}U(r_j).$$

结合

$$T(R_j, f)\geqslant T(r_j, f)\geqslant\frac{1}{2}U(r_j),$$

便有

$$m(R_j, f)>\frac{1}{4}U(r_j). \tag{7.2.8}$$

于是证明可如引理 7.1 和定理 7.2 的推理进行.

定理 7.2 与 7.3 中函数 $f(z)$ 有一亏值或 Borel 例外值的假定可易为其导数 $f^{(k)}(z)$ 有一亏值或 Borel 例外值.

定理 7.4. 设 $f(z)$ 于开平面亚纯，其级 λ 为有穷正数. 若 $f^{(k)}(z)$ (k 为任意给定的正整数)以某值 a_0 (有穷或否)为亏值或 Borel 例外值，则定理 7.2 结论成立.

关于定理 7.4 的证明，有兴趣的读者可以参阅杨乐、张广厚[2]的原文.

§7.3. 亚纯函数的亏值总数与 Borel 方向总数

7.3.1. 亏值总数与 Borel 方向总数

在定理 1.9 里，我们已经看到对于开平面上的超越亚纯函数 $f(z)$，其亏值是可数的，并且亏量总和至大为 2. R. Nevanlinna 建立了这个基本定理后，他和很多学者都注意到是否对亚纯函数附

加了某些条件能够使其亏值数目是有限的，并且给出上界的估计．例如，R. Nevanlinna[2] 曾猜测有穷级的亚纯函数，其亏值数目是有穷的．他还相应于有关渐近值数目的著名的 Denjoy 猜测，提出是否级为 $\lambda(0<\lambda<\infty)$的整函数的有穷亏值总数不超过 2λ．

围绕着亏值数目有很多研究工作．首先，A. Pfluger[1] 证明了：若 $\lambda(<\infty)$级整函数的总亏量恰为 2，则它至多有 $\lambda+1$ 个亏值．稍后，G. Valiron[6] 证明了零级亚纯函数至多只有一个亏值．而 A. A. Гольдберг[1] 则构造了具有无穷个亏值的有穷级亚纯函数的例子，这就说明了仅用亚纯函数的级(即函数的增长性)，不可能界囿其亏值总数．

六十年代初，A. Edrei 与 W. H. J. Fuchs[4,5] 研究了一类特殊的亚纯函数的亏值总数，这类函数的零点与极点需服从某些限制．此外，他们在关于亏量关系的研究中，也曾得到其他特殊情况下亚纯函数的亏值总数的结果．1966 年，H. У. Аракелян[1] 证明了存在级等于 λ(λ 为大于 1/2 的任意数)的整函数，具有无穷个亏值．这就否定了上述 R. Nevanlinna 的猜测．1969 年，A. Weitsman[1] 把 A. Pfluger 的结果推广到亚纯函数．近年来仍有一些研究工作涉及到亏值数目的问题，例如 A. Edrei[4]，杨乐与张广厚[8,9]．

这里，我们着重介绍有穷正级亚纯函数的亏值数目与 Borel 方向数目间的联系（杨乐与张广厚[3]）．

定理 7.5. 设 $f(z)$于开平面亚纯，级 λ 为有穷正数，若记 $f(z)$ 的亏值总数为 p，$f(z)$的 Borel 方向总数为 q，则 $p\leqslant q$．

证．根据定理 3.8，有穷正级的亚纯函数至少存在一条 Borel 方向，因此 $q\geqslant 1$．

当 $q=\infty$ 时，定理结论显然成立．

当 $1\leqslant q<\infty$ 时，如果定理结论不成立，即 $p\geqslant q+1$，我们将由此出发导致矛盾．

在 $f(z)$的 p 个亏值中任取 $q+1$ 个，记为

$$a_\nu(\nu=1,2,\cdots,q+1),\ \delta(a_\nu,f)=\delta_\nu>0,$$

$$\delta = \min_{1 \leqslant \nu \leqslant q+1} \delta_{\nu}.$$

无妨设 $a_\nu(\nu = 1, 2, \cdots, q+1)$ 均为有穷，因为在相反的情况下仅需代替 $f(z)$ 而考虑函数 $\dfrac{1}{f(z) - a_0}$（a_0 不是 $f(z)$的亏值）. 显然 $f(z)$ 与 $\dfrac{1}{f(z) - a_0}$ 亏值总数相同，Borel 方向总数也相同，并且 $\dfrac{1}{f(z) - a_0}$ 的亏值皆为有穷值.

记 $f(z)$的 q 条 Borel 方向为 B_m: $\arg z = \varphi_m(m = 1, 2, \cdots, q;\ 0 \leqslant \varphi_1 < \varphi_2 < \cdots < \varphi_q < 2\pi;\ \varphi_{q+1} = 2\pi + \varphi_1)$，以及 $\lambda(r)$ 为 $f(z)$的一精确级，$U(r) = r^{\lambda(r)}$. 应用引理 7.1 于 $f(z)$ 和 $q+1$ 个亏值 $a_\nu(\nu = 1, 2, \cdots, q+1)$，可得一贯正数 R_j，

$$\lim_{j \to \infty} R_j = \infty,$$

当 j 充分大时(以下所有的讨论都在 j 充分大时进行，不再每次赘述)使

$$\log \frac{1}{|f(R_j e^{i\varphi}) - a_\nu|} > \frac{\delta}{2^{\lambda+4}} U(R_j)$$

$$(\nu = 1, 2, \cdots, q+1) \qquad (7.3.1)$$

成立的值 $\varphi(0 \leqslant \varphi < 2\pi)$ 构成的集合 $E_{j\nu}$，其测度

$$\operatorname{mes} E_{j\nu} > K(\delta, q+1, \lambda) \qquad (\nu = 1, 2, \cdots, q+1). \quad (7.3.2)$$

于此

$$K(\delta, q+1, \lambda) = \frac{\delta\pi}{\left(5 + \dfrac{\log 25(q+1)e}{\log \dfrac{4}{3}}\right) 4^{\lambda+2}}.$$

于是在 q 个角域 $\varphi_m < \arg z < \varphi_{m+1}(m = 1, 2, \cdots, q)$ 中至少有一个，例如 G_1: $\varphi_{m_1} < \arg z < \varphi_{m_1+1}$，以及 R_j 的子序列 R_{j1}，使得弧段 $A_{j1}^{(1)}$: $\{z: |z| = R_{j1}, \varphi_{m_1} < \arg z < \varphi_{m_1+1}\}$ 上适合关系式

$$\log \frac{1}{|f(R_{j1} e^{i\varphi}) - a_1|} > \frac{\delta}{2^{\lambda+4}} U(R_{j1}) > R_{j1}^{\lambda-\varepsilon} \ (\varepsilon > 0) \quad (7.3.3)$$

的 φ 的值构成集合，测度大于 $\dfrac{1}{q} K(\delta, q+1, \lambda)$.

对于 $f(z)$，其亏值 a_1，$f(z)$相邻的两条 Borel 方向

$$B_{m_1}: \arg z = \varphi_{m_1}, \quad B_{m_1+1}: \arg z = \varphi_{m_1+1},$$

数列 R_{j1} 以及正常数

$$K_1 = K_2 = \frac{1}{q} K(\delta, q+1, \lambda)$$

应用引理 7.2，则对于充分小的任意正数 α，可得一列曲线段 $L_{j1}^{(1)}$. 对于任意正数 η，$L_{j1}^{(1)}$ 上所有的点 z 都适合不等式

$$\log \frac{1}{|f(z) - a_1|} > R_{j1}^{\lambda-\eta}, \tag{7.3.4}$$

并且 $\operatorname{mes}\{\varphi: R_{j1}e^{i\varphi} \in A_{j1}^{(1)} - L_{j1}^{(1)}\} < \frac{1}{q} K(\delta, q+1, \lambda)$.

取 $d = \min\limits_{1\leqslant\mu\neq\nu\leqslant q+1} |a_\mu - a_\nu|$，当 i 充分大时可使

$$\max\{e^{-R_{j1}^{\lambda-\varepsilon}}, e^{-R_{j1}^{\lambda-\eta}}\} < \frac{d}{2}.$$

于是弧段 $L_{j1}^{(1)}$ 上的点 z 必不能满足不等式

$$\log \frac{1}{|f(z) - a_\nu|} > R_{j1}^{\lambda-\varepsilon} \qquad (\nu = 2, 3, \cdots, q+1). \tag{7.3.5}$$

事实上，若点 $z \in L_{j1}^{(1)}$ 对 $a_{\nu_0}(2 \leqslant \nu_0 \leqslant q+1)$适合不等式(7.3.5)，则与(7.3.4)相结合，便推得下列矛盾的关系式

$$\begin{aligned} d \leqslant |a_1 - a_{\nu_0}| &\leqslant |a_1 - f(z)| + |f(z) - a_{\nu_0}| \\ &< e^{-R_{j1}^{\lambda-\eta}} + e^{-R_{j1}^{\lambda-\varepsilon}} < d. \end{aligned}$$

于是在角域 G_1 内，使不等式

$$\log \frac{1}{|f(R_{j1}e^{i\varphi}) - a_2|} > R_{j1}^{\lambda-\varepsilon} \tag{7.3.6}$$

成立的点 $z = R_{j1}e^{i\varphi}$ 应含于集 $A_{j1}^{(1)} - L_{j1}^{(1)}$ 内，从而使不等式(7.3.6)成立的值 $\varphi(\varphi_1 < \varphi < \varphi_2)$构成集合，测度也小于

$$\frac{1}{q} K(\delta, q+1, \lambda).$$

但是 R_{j1} 是 R_j 的子列，根据(7.3.1)与(7.3.2)，使(7.3.6)成立的值 $\varphi(0 \leqslant \varphi < 2\pi)$构成集合，其测度应大于 $K(\delta, q+1, \lambda)$.

因此在开平面除去 G_1 后所余下的 $q-1$ 个角域

$$\varphi_m < \arg z < \varphi_{m+1}(m=1,2,\cdots,m_1-1,m_1+1,\cdots,q)$$

内，至少有一个，例如 $G_2:\varphi_{m_2} < \arg z < \varphi_{m_2+1}$，以及 R_{j1} 的子序列 R_{j2}，使弧段 $A_{j2}^{(2)}.\{R_{j2}e^{i\varphi}:\varphi_{m_2} < \varphi < \varphi_{m_2+1}\}$上适合关系式

$$\log\frac{1}{|f(R_{j2}e^{i\varphi})-a_2|} > \frac{\delta}{2^{\lambda+4}}U(R_{j2}) > R_{j2}^{\lambda-\varepsilon} \qquad (7.3.7)$$

的 φ 的值构成集合，测度大于 $\frac{1}{q}K(\delta,q+1,\lambda)$.

对于 $f(z)$，其亏值 a_2，$f(z)$相邻的两条 Borel 方向

$$B_{m_2}:\arg z=\varphi_{m_2},\quad B_{m_2+1}:\arg z=\varphi_{m_2+1},$$

数列 R_{j2} 以及正的常数

$$K_1=K_2=\frac{1}{q}K(\delta,q+1,\lambda),$$

应用引理 7.2 则对于充分小的任意正数 α，可得一列曲线段 $L_{j2}^{(2)}$，对于任意正数 η，$L_{j2}^{(2)}$ 上所有的点 z 都适合不等式

$$\log\frac{1}{|f(z)-a_2|} > R_{j2}^{\lambda-\eta}. \qquad (7.3.8)$$

并且

$$\operatorname{mes}\{\varphi:R_{j2}e^{i\varphi}\in A_{j2}^{(2)}-L_{j2}^{(2)}\} < \frac{1}{q}K(\delta,q+1,\lambda).$$

如上可知，弧段 $L_{j2}^{(2)}$ 上所有的点 z 必不能满足不等式

$$\log\frac{1}{|f(z)-a_\nu|} > R_{j2}^{\lambda-\varepsilon}\quad(\nu=1,3,4,\cdots,q+1). \quad (7.3.9)$$

于是在 $G_\nu(\nu=1,2)$ 内使

$$\log\frac{1}{|f(R_{j2}e^{i\varphi})-a_3|} > R_{j2}^{\lambda-\varepsilon} \qquad (7.3.10)$$

成立的点 $z=R_{j2}e^{i\varphi}$应含于集 $A_{j2}^{(\nu)}-L_{j2}^{(\nu)}$内，从而使不等式(7.3.10)成立的值 $\varphi(\varphi_{m_\nu} < \varphi < \varphi_{m_\nu+1})$ 构成的集合，测度小于

$$\frac{1}{q}K(\delta,q+1,\lambda)\quad(\nu=1,2).$$

但是 R_{j2} 是 R_j 的子序列，根据(7.3.1)与(7.3.2)，使(7.3.10)成立的值 $\varphi(0 \leqslant \varphi < 2\pi)$构成的集合，其测度大于 $K(\delta, q+1, \lambda)$.

因此在开平面除去 $G_\nu(\nu=1,2)$ 后所余下的 $q-2$ 个角域 $\varphi_m < \arg z < \varphi_{m+1}(m \neq m_1, m_2)$ 内，又至少有一个，例如 G_3，具有类似的性质.

如此继续下去，则对于 q 个亏值 $a_\nu(\nu=1,2,\cdots,q)$，相应地就有 q 个角域 $G_\nu: \varphi_{m_\nu} < \arg z < \varphi_{m_\nu+1}(\nu=1,2,\cdots,q)$ 互不相交. 对于每个 G_ν，有一列数 $R_{j\nu}$，其中 R_{j1} 是 R_j 的子序列，$R_{j\nu+1}(\nu=1,2,\cdots,q-1)$是 $R_{j\nu}$ 的子序列，以及相应的一列曲线段 $L_{j\nu}^{(\nu)}$，使得对于任意正数 η，$L_{j\nu}^{(\nu)}$ 上所有的点 z 适合不等式

$$\log\frac{1}{|f(z)-a_\nu|} > R_{j\nu}^{\lambda-\eta}, \tag{7.3.11}$$

而不能适合不等式

$$\log\frac{1}{|f(z)-a_\mu|} > R_{j\nu}^{\lambda-\varepsilon}$$

$$(\mu=1,2,\cdots,\nu-1,\nu+1,\cdots,q+1). \tag{7.3.12}$$

并且

$$\text{mes}\{\varphi: R_{j\nu}e^{i\varphi} \in A_{j\nu}^{(\nu)} - L_{j\nu}^{(\nu)}\} < \frac{1}{q}K(\delta, q+1, \lambda).$$

于此，$A_{j\nu}^{(\nu)}$ 表弧段 $\{R_{j\nu}e^{i\varphi}: \varphi_{m_\nu} < \varphi < \varphi_{m_\nu+1}\}$.

从而在 $G_\nu(\nu=1,2,\cdots,q)$内使

$$\log\frac{1}{|f(R_{jq}e^{i\varphi})-a_{q+1}|} > R_{jq}^{\lambda-\varepsilon} \tag{7.3.13}$$

成立的值 φ 构成集合，其测度 $\leqslant \text{mes}\{\varphi: R_{jq}e^{i\varphi} \in A_{jq}^{(\nu)} - L_{jq}^{(\nu)}\}$ $< \frac{1}{q}K(\delta, q+1, \lambda)$.

由于 q 条 Borel 方向 $B_m: \arg z = \varphi_m(m=1,2,\cdots,q)$ 只能构成 q 个相邻的(即形如 $\varphi_m < \arg z < \varphi_{m+1}$)互不相交的角域，所以每个 $G_\nu(\nu=1,2,\cdots,q)$分别与上述 q 个角中的一个重合. 从而

$$\left(\bigcup_{v=1}^{q} G_v\right)\cup\left(\bigcup_{m=1}^{q} B_m\right)$$

覆盖了开平面. 因此使(7.3.13)成立的值 $\varphi(0\leqslant\varphi<2\pi)$ 构成的集合,其测度

$$\leqslant\sum_{v=1}^{q}\operatorname{mes}\{\varphi: R_{jq}e^{i\varphi}\in A_{jq}^{(v)}-L_{jq}^{(v)}\}<K(\delta,q+1,\lambda).$$

但是 R_{jq} 是 R_j 的子序列,根据(7.3.1)与(7.3.2)使(7.3.13)成立的值 $\varphi(0\leqslant\varphi<2\pi)$构成的集合的测度应大于 $K(\delta,q+1,\lambda)$. 这样便推得矛盾. 即 $p\geqslant q+1$ 的假定不能成立. 定理遂得证.

7.3.2. 补充

定理 7.5 中的不等式 $p\leqslant q$ 按照下述意义是准确的: 任给正整数 n,存在有穷正级的亚纯函数 $f(z)$,其亏值数目 p 和 Borel 方向数目 q 都等于 n. 即这时定理 7.5 结论中的等号成立.

事实上,当 $n=1$ 时函数

$$f(z)=\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{k^2}\right) \tag{7.3.14}$$

便符合要求. 这时类似于以下引理 8.9 的计算, 对于任意正数 ε 在 $\varepsilon<\arg z<2\pi-\varepsilon$ 内有

$$\log|f(re^{i\theta})|=\left(\pi\cos\frac{\theta-\pi}{2}\right)r^{\frac{1}{2}}+o(r^{\frac{1}{2}}). \tag{7.3.15}$$

于是$f(z)$ 的级为 $1/2$. $f(z)$是整函数,它以∞为亏值. 根据引理 7.1 与(7.3.15), $f(z)$不再具有任何有穷亏值. 即 $p=1$. 根据定理 3.8, $f(z)$至少有一条 Borel 方向, 但是(7.3.15)式说明了 $f(z)$ 仅能以正实轴为其 Borel 方向. 即 $q=1$. 故 $p=q=1$.

当 $n=2$ 时, e^z 就提供了这样的例子. 它的级为 1, 具有两个亏值 0 和∞,两条 Borel 方向为正、负虚轴. 故 $p=q=2$.

当 $n>2$ 时,考虑函数

$$f(z)=\frac{J_{\frac{1}{n}}\left(\frac{2z^{\frac{n}{2}}}{n}\right)}{J_{-\frac{1}{n}}\left(\frac{2z^{\frac{n}{2}}}{n}\right)},\tag{7.3.16}$$

其中

$$J_{\frac{1}{n}}\left(\frac{2z^{\frac{n}{2}}}{n}\right)=\frac{1}{n^{\frac{1}{n}}z^{\frac{1}{2}}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k z^{nk+1}}{n^{2k}k!\Gamma\left(\frac{1}{n}+k+1\right)},$$

$$J_{-\frac{1}{n}}\left(\frac{2z^{\frac{n}{2}}}{n}\right)=\frac{n^{\frac{1}{n}}}{z^{\frac{1}{2}}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k z^{nk}}{n^{2k}k!\Gamma\left(-\frac{1}{n}+k+1\right)}.$$

可以证明$f(z)$的级为$\frac{n}{2}$，$f(z)$ 恰有 n 个亏值 $e^{\frac{(2k+1)\pi i}{n}}$ $(k=0,1,\cdots,n-1)$，即 $p=n$；$f(z)$也有 n 条 Borel 方向

$$\arg z=\frac{2k\pi}{n}\,(k=0,1,\cdots,n-1),$$

即 $q=n$. 从而 $p=q=n$. 证明这些事实时要用到一些渐近展式，这里我们就不作具体演算了.

对于级较高的有穷级亚纯函数，可以获得比较精密的结果.

定理 7.6. 设 $f(z)$于开平面亚纯，级 λ 为有穷正数. 记 $f(z)$的亏值总数为 p，$f(z)$ 的 Borel 方向总数为 q. 若 $\lambda>\frac{p}{2}$，则 $p\leqslant q-1$.

证. 当 $q=\infty$ 时定理结论显然成立.

当 $q<\infty$ 时如果定理结论不成立，即 $p>q-1$. 在 $f(z)$ 的亏值中任取 q 个，记为 $a_\nu(\nu=1,2,\cdots,q)$，$\delta(a_\nu,f)>0$. 置 $\delta=\min\limits_{1\leqslant\nu\leqslant q}\delta(a_\nu,f)$（如同定理 7.5，无妨假定 a_ν 均为有穷值），又记 $f(z)$的 q 条 Borel 方向为 $B_m:\arg z=\varphi_m(m=1,2,\cdots,q;0\leqslant\varphi_1<\varphi_2<\cdots<\varphi_q<2\pi;\ \varphi_{q+1}=2\pi+\varphi_1)$.

类似定理 7.5 证明中的推理，相应于 q 个亏值 a_ν 便有 q 个互不相交的角域 $G_\nu:\varphi_{m_\nu}<\arg z<\varphi_{m_\nu+1}(\nu=1,2,\cdots,q)$. 对于

每个 G_ν，有一列趋于∞的正数 R_j，以及相应的一列曲线段 $L_{j\nu}^{(\nu)}$，适合引理 7.2 的结论．如同定理 7.2 的证明可知 G_ν的开度不超过 $\frac{\pi}{\lambda}$．即

$$\varphi_{m_\nu+1}-\varphi_{m_\nu}\leqslant\frac{\pi}{\lambda}\qquad(\nu=1,2,\cdots,q).$$

故

$$\sum_{\nu=1}^{q}(\varphi_{m_\nu+1}-\varphi_{m_\nu})\leqslant q\frac{\pi}{\lambda}\leqslant p\frac{\pi}{\lambda}<2\pi.$$

但是开平面为 q 条 Borel 方向 $B_m(m=1,2,\cdots,q)$恰巧分为 q 个角域 $G_\nu(\nu=1,2,\cdots,q)$，从而

$$\sum_{\nu=1}^{q}(\varphi_{m_\nu+1}-\varphi_{m_\nu})=2\pi.$$

这个互相矛盾的事实便证明了 p 决不能大于 $q-1$．

§7.4. 整函数的亏值总数与 Borel 方向总数以及级的关系

7.4.1. 几个引理

为了对整函数获得进一步的结果，我们必须建立几个引理[1)]．

引理 7.3. 设 $f(z)$为 $\lambda(0<\lambda<\infty)$级整函数，$\lambda(r)$为 $f(z)$的一精确级，置 $U(r)=r^{\lambda(r)}$．又设

$$B_1:\arg z=\varphi_1,\ B_2:\arg z=\varphi_2(0\leqslant\varphi_1<\varphi_2\leqslant 2\pi+\varphi_1)$$

为两条由原点发出的半直线，在角域 $\varphi_1<\arg z<\varphi_2$ 内不含有 $f(z)$的 Borel 方向．若存在有穷复数 a_0，正数 η 以及一列正数 R_j，$\lim\limits_{j\to\infty}R_j=\infty$，使得在弧段 $A_j:\{R_je^{i\varphi}:\varphi_1<\varphi<\varphi_2\}$ 上适合不等式

$$\log|f(R_je^{i\varphi})-a_0|<-\eta U(R_j)\tag{7.4.1}$$

的φ值构成的集合 E_j，其测度大于正数 K'(不依赖于 j)，则对于

1) 关于§7.4.，请参阅杨乐、张广厚[4]．

充分小的正数 α 和大于 1 的正数 Q，$Q<\frac{1}{4\alpha}$，当 j 充分大时在区域 $D_j:\left(\frac{R_j}{Q}\leqslant|z|\leqslant QR_j\right)\cap(\varphi_1+10\alpha\leqslant\arg z\leqslant\varphi_2-10\alpha)$ 上有

$$\log|f(z)-a_0|<-\frac{\eta}{\left\{4\left(5+4\log\frac{2}{h}\right)\right\}^{2N_1+N_2}}U(R_j)\quad(7.4.2)$$

以及

$$\log|f^{(k)}(z)|<-\frac{\eta}{\left\{4\left(5+4\log\frac{2}{h}\right)\right\}^{2N_1+N_2}}U(R_j)$$

$$+\log k!\left\{\left(\frac{2Q}{\alpha R_j}\right)^k\right\}\qquad(k=1,2,\cdots),\qquad(7.4.3)$$

其中

$$N_1=\left[\frac{\pi}{\alpha}\right]+1,\qquad N_2=\left[\frac{2(Q-1)}{\alpha}\right]+4Q,$$

$$h=\frac{K'}{80(2e+1)(\pi+\alpha)}.\qquad(7.4.4)$$

证. 取 α，使

$$0<\alpha<\min\left(\frac{K'}{32},\ \frac{\varphi_2-\varphi_1}{20}\right).$$

在区域 $G:\varphi_1+8\alpha\leqslant\arg z\leqslant\varphi_2-8\alpha$ 上适合不等式(7.4.1)的 φ 值构成集合的测度大于 $\frac{K'}{2}$. 将 G 分为 $N_1=\left[\frac{\pi}{\alpha}\right]+1$ 个相等的小角域 $G_\nu(\nu=1,2,\cdots,N_1)$，每个 G_ν 的开度不超过 2α. 对于每个 j 存在 $\nu_0=\nu_0(j)$，使得 G_{ν_0} 内适合(7.4.1)式的 φ 值构成集合的测度大于 $\frac{K'}{2N_1}\geqslant\frac{\alpha}{2(\pi+\alpha)}K'$.

由于 B_1 与 B_2 之间不含有 $f(z)$ 的 Borel 方向，于是根据定理 3.10 存在两个互相判别的有穷复数 $b_l(l=1,2)$ 与数 τ，$0<\tau$

$<\lambda$ 使当 r 充分大时有

$$\sum_{l=1}^{2} n\{(|z| \leqslant r) \cap (\varphi_1 + \alpha \leqslant \arg z \leqslant \varphi_2 - \alpha), f = b_l\} < r^{\tau}.$$

记

$$n_1 = \sum_{l=1}^{2} n\{(|z| \leqslant (1 + 6\alpha)R_j) \cap (\varphi_1 + \alpha \leqslant \arg z \leqslant \varphi_2 - \alpha), f = b_l\} + n\{(|z| \leqslant (1 + 6\alpha)R_j) \cap (\varphi_1 + \alpha \leqslant \arg z \leqslant \varphi_2 - \alpha), f = a_0\},$$

$$h = \frac{K'}{80(2e + 1)(\pi + \alpha)}.$$

在区域 $(|z| \leqslant (1 + 6\alpha)R_j) \cap (\varphi_1 + \alpha \leqslant \arg z \leqslant \varphi_2 - \alpha)$ 内，以 $f(z) - b_l(l = 1, 2)$ 与 $f(z) - a_0$ 的每个零点为圆心，$\frac{5\alpha R_j}{n_1 + 1} h$ 为半径作普通除外圆，这些圆的总和记为 $(\gamma)_1$。

命 G_{ν_0} 的平分线与 $|z| = R_j$ 的交点为 z_1，记 Γ_j 为圆

$$|z - z_1| \leqslant \alpha R_j.$$

位于 Γ_j 内且在 $(\gamma)_1$ 外的任意点为 z_2，作变换

$$z = z_2 + 5\alpha R_j \zeta. \tag{7.4.5}$$

这时 $f(z) = f(z_2 + 5\alpha R_j \zeta) = F(\zeta)$，除外圆 $(\gamma)_1$ 在 ζ 平面的象记作 $(\gamma)_1'$。

在圆 $|\zeta| \leqslant \frac{3}{5}$ 内，$F(\zeta) - a_0$ 的零点为 $\beta_s(s = 1, 2, \cdots, n_2)$，由 Boutroux-Cartan 定理有

$$\prod_{s=1}^{n_2} |\zeta - \beta_s| > h^{n_2},$$

至多除去 n_2 个小圆 $(\gamma)_2'$，其半径总和不超过 $2eh$. $(\gamma)_2'$ 在变换 (7.4.5) 下的原象记为 $(\gamma)_2$.

由于 $(\gamma)_1$ 与 $(\gamma)_2$ 的直径总和不超过

$$10h\alpha R_j + 4eh \cdot 5\alpha R_j = \frac{\alpha K'}{8(\pi + \alpha)} R_j,$$

而在 G_{z_0} 内使(7.4.1)成立的点集具有测度大于 $\dfrac{\alpha K'}{2(\pi+\alpha)}R_j$，所以在 Γ_j 内存在点 z_3 位于 $(\gamma)_1$ 与 $(\gamma)_2$ 外，且使(7.4.1)成立. 在变换(7.4.5)下，z_3 的象点记为 ζ_3，则 $|\zeta_3|\leqslant\dfrac{2}{5}$，$\zeta_3$ 位于 $(\gamma)_1'$ 与 $(\gamma)_2'$ 外，且

$$\log|F(\zeta_3)-a_0|<-\eta U(R_j).$$

应用 Poisson-Jensen 公式则

$$\log\frac{1}{|F(\zeta_3)-a_0|}\leqslant\frac{\dfrac{3}{5}+\dfrac{2}{5}}{\dfrac{3}{5}-\dfrac{2}{5}}m\left(\frac{3}{5},\ \frac{1}{F-a_0}\right)$$

$$+\sum_s\log\left|\frac{\left(\dfrac{3}{5}\right)^2-\bar{\beta}_s\zeta_3}{\dfrac{3}{5}(\zeta_3-\beta_s)}\right|$$

$$\leqslant 5m\left(\frac{3}{5},\ \frac{1}{F-a_0}\right)+n\left(\frac{3}{5},\ \frac{1}{F-a_0}\right)\log\frac{2}{h}$$

$$<\left(5+4\log\frac{2}{h}\right)T\left(\frac{4}{5},\ \frac{1}{F-a_0}\right).$$

为了界囿 $T\left(\dfrac{4}{5},\ \dfrac{1}{F-a_0}\right)$，应用引理 6.6，取 $R=1$ 则

$$T\left(\frac{4}{5},\ \frac{1}{F-a_0}\right)$$

$$<T\left(\frac{4}{5},\ \frac{\dfrac{1}{F-a_0}}{\dfrac{1}{F-a_0}-\dfrac{1}{b_2-a_0}}\cdot\frac{\dfrac{1}{b_1-a_0}-\dfrac{1}{b_2-a_0}}{\dfrac{1}{b_1-a_0}}\right)$$

$$+\log\left|\frac{1}{F(0)-a_0}-\frac{1}{b_2-a_0}\right|+D$$

$$< C\left(\sum_{l=1}^{2} n(1, F=b_l)+1\right)$$

$$\times\left\{\log\frac{\left(\sum_{l=1}^{2} n(1, F=b_l)+1\right)}{\frac{h}{n_1+1}}+\log 10\right\}$$

$$+2\log^+\frac{1}{|F(0)-a_0|}+D.$$

于此D为依赖于 a_0, b_1, b_2 的常数.

由于

$$\sum_{l=1}^{2} n(1, F=\beta_l)=\sum_{l=1}^{2} n(|z-z_2|\leqslant 5\alpha R_j, f=\beta_l)$$

$$\leqslant\sum_{l=1}^{2} n\{(|z|\leqslant(1+6\alpha)R_j)\cap(\varphi_1+\alpha\leqslant\arg z\leqslant$$

$$\varphi_2-\alpha), f=\beta_l\}<(1+6\alpha)^{\tau}R_j^{\tau} \qquad (j>j_0),$$

以及

$$n_1< R_j^{\lambda+1} \qquad (j>j_0),$$

于是当 j 充分大时可使

$$C\left(\sum_{l=1}^{2} n(1, F=b_l)+1\right)$$

$$\times\left\{\log\frac{\left(\sum_{l=1}^{2} n(1, F=b_l)+1\right)}{\frac{h}{n_1+1}}+\log 10\right\}+D$$

$$<\frac{\eta}{4\left(5+4\log\frac{2}{h}\right)^{2N_1+N_2}}U(R_j). \qquad (7.4.6)$$

从而

$$\frac{\eta}{2}U(R_j)<2\left(5+4\log\frac{2}{h}\right)\log\frac{1}{|F(0)-a_0|}.$$

即

$$\log\frac{1}{|f(z_2)-a_0|}>\frac{\eta}{4\left(5+4\log\frac{2}{h}\right)}U(R_j).\qquad(7.4.7)$$

在域G内，使 Γ_j 的圆心保持在圆周 $|z|=R_j$ 上而向两边顺次转动 Γ_j，每次转动α角，至多转动 $2N_1$ 次，得到总数不超过 $2N_1$ 的圆组成的区域 Γ_Σ，除外圆则为$(\gamma)_1$. Γ_Σ 覆盖了区域

$$\left(R_j-\frac{\sqrt{3}}{2}\alpha R_j\leqslant|z|\leqslant R_j+\frac{\sqrt{3}}{2}\alpha R_j\right)$$

$$\cap(\varphi_1+8\alpha\leqslant\arg z\leqslant\varphi_2-8\alpha).$$

如上逐步递推后可知，对于 Γ_Σ 中的任意点 z，只要 $z\bar{\in}(\gamma)_1$，当j充分大时便有

$$\log\frac{1}{|f(z)-a_0|}>\frac{\eta}{\left\{4\left(5+4\log\frac{2}{h}\right)\right\}^{2N_1}}U(R_j).$$

即

$$|f(z)-a_0|<e^{-\frac{\eta}{\left\{4\left(5+4\log\frac{2}{h}\right)\right\}^{2N_1}}U(R_j)}.\qquad(7.4.8)$$

将除外圆$(\gamma)_1$分为两类：$(\gamma)_{11}$与$(\gamma)_{12}$. $(\gamma)_{11}$中所有的小圆皆含于Γ_Σ内，而$(\gamma)_{12}$的小圆皆与Γ_Σ的边界相交，由最大模原理，当 $z\in(\gamma)_{11}$时(7.4.8)式仍成立. 注意到$(\gamma)_{12}$中所有小圆的直径不超过 $10h\alpha R_j<\frac{\alpha R_j}{8}$，$\Gamma_\Sigma-(\gamma)_{12}$ 便覆盖了区域

$$\left(R_j-\frac{\alpha R_j}{2}\leqslant|z|\leqslant R_j+\frac{\alpha R_j}{2}\right)$$

$$\cap\left(\varphi_1+\frac{33}{4}\alpha\leqslant\arg z\leqslant\varphi_2-\frac{33}{4}\alpha\right),$$

所以在此区域上有

$$\log|f(z)-a_0|<-\frac{\eta}{\left\{4\left(5+4\log\frac{2}{h}\right)\right\}^{2N_1}}U(R_j).$$

设 $z_0 = R_j e^{i\theta_0}$ 为

$$(|z| = R_j) \cap \left(\varphi_1 + \frac{33}{4}\alpha \leqslant \arg z \leqslant \varphi_2 - \frac{33}{4}\alpha\right)$$

上的任意点，作同心二圆

$$\Gamma_j': |z - z_0| \leqslant \frac{\alpha R_j}{2}, \quad \Gamma_j'': |z - z_0| \leqslant \frac{\alpha R_j}{2Q},$$

在直线段 $\{re^{i\varphi_0}: R_j \leqslant r \leqslant (Q + 2\alpha)R_j\}$ 上顺次移动 Γ_j'，每次移动 $\frac{\alpha R_j}{2}$ 的距离，至多移动 $N_2 = \left[\frac{2(Q-1)}{\alpha}\right] + 4Q$ 次，覆盖了整个直线段. 同样在直线段 $\left\{re^{i\varphi_0}: \left(\frac{1}{Q} - 2\alpha\right)R_j \leqslant r \leqslant R_j\right\}$上顺次移动 Γ_j''，每次移动 $\frac{\alpha R_j}{2Q}$ 的距离，至多移动 N_2 次，也覆盖了整个直线段.

如同以上的步骤，可以证明在区域

$$D_j': \left\{\left(\frac{1}{Q} - \alpha\right)R_j \leqslant |z| \leqslant (Q + \alpha)R_j\right\}$$
$$\cap (\varphi_1 + 9\alpha \leqslant \arg z \leqslant \varphi_2 - 9\alpha)$$

上有

$$\log |f(z) - a_0| < -\frac{\eta}{\left\{4\left(5 + 4\log\frac{2}{h}\right)\right\}^{2N_1+N_2}} U(R_j). \quad (7.4.9)$$

对于区域

$$D_j: \left(\frac{R_j}{Q} \leqslant |z| \leqslant QR_j\right) \cap (\varphi_1 + 10\alpha \leqslant \arg z \leqslant \varphi_2 - 10\alpha)$$

上的任意点 ζ，作圆

$$|z - \zeta| \leqslant \frac{\alpha}{2Q} R_j,$$

它含于区域 D_j' 内，应用 Cauchy 不等式，则

$$|f^{(k)}(\zeta)| \leqslant k! \frac{\max\limits_{z\in D_j'} |f(z) - a_0|}{\left(\frac{\alpha R_j}{2Q}\right)^k} \quad (k = 1, 2, \cdots). \tag{7.4.10}$$

由(7.4.9),(7.4.10)两式即可推得(7.4.3).

引理 7.4. 设域G为$(t_1 < |z| < t_2)\cap(\varphi_1 < \arg z < \varphi_2)$ $(0 < t_1 < t_2 < \infty, 0 \leqslant \varphi_1 < \varphi_2 < 2\pi + \varphi_1)$, $\Gamma_\nu(\nu = 1, 2)$ 为G的边界属于$|z| = t_\nu$的部分. 若以$\omega(z, \Gamma_\nu, G)(\nu = 1, 2)$表示$G$中的点$z = re^{i\varphi}$ 关于Γ_ν 相对于G的调和测度[1]，则

$$\omega(z, \Gamma_1, G) \leqslant \frac{4\left(\frac{t_1}{r}\right)^{\frac{\pi}{\varphi_2-\varphi_1}}}{\pi\left[1 - \left(\frac{t_1}{r}\right)^{\frac{2\pi}{\varphi_2-\varphi_1}}\right]}, \tag{7.4.11}$$

$$\omega(z, \Gamma_2, G) \leqslant \frac{4\left(\frac{r}{t_2}\right)^{\frac{\pi}{\varphi_2-\varphi_1}}}{\pi\left[1 - \left(\frac{r}{t_2}\right)^{\frac{2\pi}{\varphi_2-\varphi_1}}\right]}. \tag{7.4.12}$$

证. 对于 $\omega(z, \Gamma_1, G)$，只需作一自变数的倒数变换，便可化归$\omega(z, \Gamma_2, G)$的情况，因此仅需对 $\omega(z, \Gamma_2, G)$ 作出估计.

以 G' 表示区域$(|z| < t_2)\cap(\varphi_1 < \arg z < \varphi_2)$，则

$$\omega(z, \Gamma_2, G) \leqslant \omega(z, \Gamma_2, G').$$

作变换

$$\zeta = \xi + i\eta = \left\{\frac{z}{t_2} e^{-i\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}}\right\}^{\frac{\pi}{\varphi_2-\varphi_1}},$$

它将 G' 映为半圆

$$D: (|\zeta| < 1)\cap\left(-\frac{\pi}{2} < \arg\zeta < \frac{\pi}{2}\right),$$

将 Γ_2 映为半圆周

1) 关于调和测度可参阅 Голузин[1] 或 Nevanlinna[3].

$$S:(|\zeta|=1)\cap\left(-\frac{\pi}{2}<\arg\zeta<\frac{\pi}{2}\right),$$

于是

$$\omega(z,\Gamma_2,G')=\omega(\zeta,S,D).$$

但若以 θ 表示点 ζ 关于直径 $(\xi=0)\cap(-i\leqslant\eta\leqslant i)$ 的张角的补角，则

$$\omega(\zeta,S,D)=\frac{2\theta}{\pi}.$$

因此

$$\omega(z,\Gamma_2,G)\leqslant\frac{2}{\pi}\left\{\operatorname{arctg}\frac{\xi}{1+\eta}+\operatorname{arctg}\frac{\xi}{1-\eta}\right\}$$

$$\leqslant\frac{2}{\pi}\left(\frac{\xi}{1+\eta}+\frac{\xi}{1-\eta}\right)=\frac{4\xi}{\pi(1-\eta^2)}$$

$$\leqslant\frac{4|\zeta|}{\pi(1-|\zeta|^2)}=\frac{4\left(\frac{r}{t_2}\right)^{\frac{\pi}{\varphi_2-\varphi_1}}}{\pi\left[1-\left(\frac{r}{t_2}\right)^{\frac{2\pi}{\varphi_2-\varphi_1}}\right]}.$$

引理 7.5. 设 $f(z)$ 为 $\lambda(0<\lambda<\infty)$ 级整函数，$\lambda(r)$为 $f(z)$ 的一精确级，置 $U(r)=r^{\lambda(r)}$. 又设 $B_m:\arg z=\varphi_m(m=1,2,3,4;\ 0\leqslant\varphi_1<\varphi_2<\varphi_3<\varphi_4<\varphi_1+2\pi)$为四条由原点发出的半直线，在角域 $G_1:\varphi_1<\arg z<\varphi_2$ 与 $G_2:\varphi_3<\arg z<\varphi_4$ 内不含有 $f(z)$的 Borel 方向. 若存在两个判别的有穷复数 $a_\nu(\nu=1,2)$与正数 η,K' 以及一列正数 R_j，$\lim\limits_{j\to\infty}R_j=\infty$，使得

$$\operatorname{mes}E\{\varphi:\varphi_1<\varphi<\varphi_2,\ \log|f(R_je^{i\varphi})-a_1|<-\eta U(R_j)\}>K' \tag{7.4.13}$$

与

$$\operatorname{mes}E\{\varphi:\varphi_3<\varphi<\varphi_4,\ \log|f(R_je^{i\varphi})-a_2|<-\eta U(R_j)\}>K', \tag{7.4.14}$$

则 B_2 与 B_3 以及 B_4 与 B_1 的夹角必不小于 $\frac{\pi}{\lambda}$. 即

$$\varphi_3 - \varphi_2 \geqslant \frac{\pi}{\lambda},$$

$$(\varphi_1 + 2\pi) - \varphi_4 \geqslant \frac{\pi}{\lambda}.$$

证. 假设引理结论不成立，例如 $\varphi_3 - \varphi_2 < \frac{\pi}{\lambda}$，我们将由此出发而导致矛盾.

取适当小的正数 α 使

$$\varphi_3 - \varphi_2 + 20\alpha < \frac{\pi}{\lambda}.$$

在角域 $G_\nu(\nu = 1, 2)$ 内分别应用引理 7.3，则当 j 充分大时，有

$$\log |f(R_j e^{i(\varphi_2 - 10\alpha)}) - a_1| < -\frac{\eta}{\left\{4\left(5 + 4\log\frac{2}{h}\right)\right\}^{2N_1+N_2}} U(R_j), \tag{7.4.15}$$

$$\log |f(R_j e^{i(\varphi_3 + 10\alpha)}) - a_2| < -\frac{\eta}{\left\{4\left(5 + 4\log\frac{2}{h}\right)\right\}^{2N_1+N_2}} U(R_j); \tag{7.4.16}$$

以及对于 Q，$1 < Q < \frac{1}{4\alpha}$，在直线段

$$\left(\frac{R_j}{Q} \leqslant |z| \leqslant QR_j\right) \cap (\arg z = \varphi_2 - 10\alpha)$$

与

$$\left(\frac{R_j}{Q} \leqslant |z| \leqslant QR_j\right) \cap (\arg z = \varphi_3 + 10\alpha)$$

上有

$$\log |f'(z)| < -\frac{\eta}{\left\{4\left(5 + 4\log\frac{2}{h}\right)\right\}^{2N_1+N_2}} U(R_j) + \log\frac{2Q}{\alpha R_j}, \tag{7.4.17}$$

其中 N_1, N_2, h 由(7.4.4)确定.

设N为待定的正数，且 $e^N > 36$，考察扇形区域

$$D:\left\{\left(\frac{R_j}{e^N} \leqslant |z| \leqslant e^N R_j\right) \cap (\varphi_2 - 10\alpha \leqslant \arg z \leqslant \varphi_3 + 10\alpha)\right\},$$

其边界记为 Γ. 又记

$$\left.\begin{aligned} \Gamma_1 &= \Gamma \cap \left(\frac{R_j}{36} \leqslant |z| \leqslant 36R_j\right), \\ \Gamma_2 &= \Gamma \cap (|z| = e^N R_j), \\ \Gamma_3 &= \Gamma \cap \left(|z| = \frac{R_j}{e^N}\right), \\ \Gamma_4 &= \Gamma - \left(\bigcup_{\nu=1}^{3} \Gamma_\nu\right). \end{aligned}\right\} \tag{7.4.18}$$

若 $R_j e^{i\varphi} \in D$，则

$$\log|f'(R_j e^{i\varphi})| \leqslant \sum_{\nu=1}^{4} \omega(R_j e^{i\varphi}, \Gamma_\nu, D) \cdot \max_{z \in \Gamma_\nu} (\log |f'(z)|). \tag{7.4.19}$$

以下将对上式右端的诸因子进行估计.

记 D' 为区域

$$\left(\frac{R_j}{36} \leqslant |z| \leqslant 36R_j\right) \cap (\varphi_2 - 10\alpha \leqslant \arg z \leqslant \varphi_3 + 10\alpha),$$

边界为 Γ', $\Gamma_2' = \Gamma' \cap (|z| = 36R_j)$,

$$\Gamma_3' = \Gamma' \cap \left(|z| = \frac{R_j}{36}\right),$$

则

$$\sum_{\nu=2}^{4} \omega(R_j e^{i\varphi}, \Gamma_\nu, D) \leqslant \sum_{\mu=2}^{3} \omega(R_j e^{i\varphi}, \Gamma_\mu', D').$$

应用引理 7.4,计及 $(\varphi_3 + 10\alpha) - (\varphi_2 - 10\alpha) \leqslant 2\pi$，则

$$\sum_{\mu=2}^{3} \omega(R_j e^{i\varphi}, \Gamma_\mu', D')$$

$$\leqslant 2\frac{4\left(\frac{1}{36}\right)^{\frac{1}{2}}}{\pi\left(1-\frac{1}{36}\right)}<\frac{1}{2}.$$

从而

$$\omega(R_j e^{i\varphi}, \Gamma_1, D) > \frac{1}{2}.$$

由引理 7.4 还有

$$\omega(R_j e^{i\varphi}, \Gamma_2, D) \leqslant \frac{4\left(\frac{1}{e^N}\right)^{\frac{\pi}{\varphi_3-\varphi_2+20\alpha}}}{\pi\left\{1-\left(\frac{1}{e^N}\right)^{\frac{2\pi}{\varphi_3-\varphi_2+20\alpha}}\right\}} < 2e^{-\frac{\pi N}{\varphi_3-\varphi_2+20\alpha}},$$

$$\omega(R_j e^{i\varphi}, \Gamma_3, D) \leqslant \frac{4\left(\frac{1}{e^N}\right)^{\frac{\pi}{\varphi_3-\varphi_2+20\alpha}}}{\pi\left\{1-\left(\frac{1}{e^N}\right)^{\frac{2\pi}{\varphi_3-\varphi_2+20\alpha}}\right\}} < 2e^{-\frac{N}{2}}.$$

当 j 充分大时，在(7.4.17)中取 $Q=36$ 有

$$\max_{z\in\Gamma_1}\log|f'(z)| < -K^*U(R_j)$$

$$\left(K^*=\frac{\eta}{\left\{4\left(5+4\log\frac{2}{h}\right)\right\}^{2N_1+N_2}}\right),$$

取 $Q=e^N$ 时有

$$\max_{z\in\Gamma_4}\log|f'(z)| < 0.$$

$f(z)$是有穷正级整函数，当 r 充分大时有

$$\max_{|z|=r}\log|f'(z)| \leqslant \frac{2r+r}{2r-r}m(2r, f') = 3m(2r, f')$$

$$\leqslant 3\left\{m(2r, f)+m\left(2r, \frac{f'}{f}\right)\right\} < 4m(2r, f).$$

从而当 j 充分大时有

$$\max_{z\in\Gamma_2}\log|f'(z)| < 4m(2e^N R_j, f) < 8(2e^N)^\lambda U(R_j),$$

$$\max_{z\in\Gamma_3}\log|f'(z)| < 4m(2e^{-N}R_j,f) < 5U(R_j).$$

将以上这些估计代回(7.4.19)便得

$$\log|f'(R_je^{i\varphi})| < \left\{-\frac{K^*}{2}+2^{\lambda+4}e^{-N\left(\frac{\pi}{\varphi_3-\varphi_2+20\alpha}-\lambda\right)}+10e^{-\frac{N}{2}}\right\}$$

$$\times U(R_j).$$

注意 $\frac{\pi}{\varphi_3-\varphi_2+20\alpha}-\lambda>0$，取$N$充分大可使

$$-\frac{K^*}{2}+2^{\lambda+4}e^{-N\left(\frac{\pi}{\varphi_3-\varphi_2+20\alpha}-\lambda\right)}+10e^{-\frac{N}{2}}<-\frac{K^*}{4}.$$

从而

$$\log|f'(R_je^{i\varphi})| < -\frac{K^*}{4}U(R_j).$$

沿着弧段 $(|z|=R_j)\cap(\varphi_2-10\alpha\leqslant\arg z\leqslant\varphi_3+10\alpha)$ 积分，有

$$|f(R_je^{i(\varphi_3+10\alpha)})-f(R_je^{i(\varphi_2-10\alpha)})|$$

$$<2\pi R_je^{-\frac{K^*}{4}U(R_j)}\to 0\qquad(j\to\infty).\tag{7.4.20}$$

这与(7.4.15)，(7.4.16)相矛盾.

7.4.2. 整函数的亏值总数与 Borel 方向总数

现在我们证明

定理 7.7. 设 $f(z)$为 $\lambda(0<\lambda<\infty)$级整函数. 若记$f(z)$的有穷亏值总数为 p，$f(z)$的 Borel 方向总数为 q，则 $p\leqslant\frac{q}{2}$.

证. 根据定理 3.8，有穷正级整函数至少存在一条 Borel 方向，因而 $q\geqslant 1$.

当 $q=\infty$ 时，定理的结论是显然的.

当 $q=1$ 时，根据定理 7.5，有穷正级亚纯函数的亏值总数不得超过其 Borel 方向总数. 现在$f(z)$是整函数，∞是一个亏值，于是这时 $f(z)$ 不再有有穷亏值.

当 $2 \leqslant q < \infty$ 时，假设定理结论不成立，即 $p > \frac{q}{2}$，于是可以取出 $f(z)$ 的 $\left[\frac{q}{2}\right]+1$ 个互相判别的有穷亏值

$$a_\nu\left(\nu = 1,2,\cdots,\ \left[\frac{q}{2}\right]+1\right),$$

使得 $\delta(a_\nu, f) = \delta_\nu > 0$. 置 $\delta = \min\limits_{1\leqslant\nu\leqslant\left[\frac{q}{2}\right]+1} \delta_\nu$. 记 $f(z)$ 的 q 条 Borel 方向为 $B_m: \arg z = \varphi_m$ $(m = 1, 2, \cdots, q;\ 0 \leqslant \varphi_1 < \varphi_2 < \cdots < \varphi_q < \varphi_{q+1} = 2\pi + \varphi_1)$.

根据引理 7.1，存在一列正数 R_j, $\lim\limits_{j\to\infty} R_j = \infty$，当 j 充分大时（以下的论证都在 j 充分大时进行，不每次赘述）使

$$\log\frac{1}{|f(R_je^{i\varphi}) - a_\nu|} > \frac{\delta}{2^{\lambda+4}} U(R_j)$$

$$\left(\nu = 1, 2, \cdots, \left[\frac{q}{2}\right]+1\right) \tag{7.4.21}$$

成立的 $\varphi(0 \leqslant \varphi < 2\pi)$ 值的集合，其测度均大于正数

$$K = K\left(\delta, \left[\frac{q}{2}\right]+1, \lambda\right).$$

于此 $U(r) = r^{\lambda(r)}$, $\lambda(r)$ 是 $f(z)$ 的一精确级.

在 q 个角域 $\varphi_m < \arg z < \varphi_{m+1}$ $(m = 1, 2, \cdots, q)$ 中至少有一个，例如 $G_1: \varphi_{m_1} < \arg z < \varphi_{m_1+1}$，以及 R_j 的子序列 R_{j1}, $\lim\limits_{j\to\infty} R_{j1} = \infty$，使得弧段：$\{R_{j1}e^{i\varphi}: \varphi_{m_1} < \varphi < \varphi_{m_1+1}\}$ 上适合关系式

$$\log\frac{1}{|f(R_{j1}e^{i\varphi}) - a_1|} > \frac{\delta}{2^{\lambda+4}} U(R_{j1})$$

的 φ 值的集合，其测度大于 $\frac{K}{q}$.

取 α，使 $0 < \alpha < \frac{K}{20q}$. 对于 $f(z)$，有穷复数 a_1，角域 G_1，

数列 R_{j1}, 正数 $K'=\dfrac{K}{q}$ 应用引理 7.3 (取 $Q=2$),则在弧段

$$\{R_{j1}e^{i\varphi}:\varphi_{m_1}+10\alpha<\varphi<\varphi_{m_1+1}-10\alpha\}$$

上有

$$\log\frac{1}{|f(R_{j1}e^{i\varphi})-a_1|}>\frac{\delta}{2^{\lambda+4}\left\{4\left(5+4\log\dfrac{2}{h}\right)\right\}^{3N_1}}U(R_{j1}), \tag{7.4.22}$$

其中

$$N_1=\left[\frac{\pi}{\alpha}\right]+1,\qquad h=\frac{K}{80(2e+1)(\pi+\alpha)q}.$$

于是在 G_1 内使不等式

$$\log\frac{1}{|f(R_{j1}e^{i\varphi})-a_\nu|}>\frac{\delta}{2^{\lambda+4}}U(R_{j1})$$

$$\left(j>j_0,\ \nu=2,3,\cdots,\left[\frac{q}{2}\right]+1\right)$$

之一成立的点 $z=R_{j1}e^{i\varphi}$, 其 φ 值构成集合的测度至多为 $20\alpha<\dfrac{K}{q}$. 从而在开平面除去 G_1 后所余下的 $q-1$ 个角域

$$\varphi_m<\arg z<\varphi_{m+1}(m=1,2,\cdots,m_1-1,m_1+1,\cdots,q)$$

中至少有一个,例如 $G_2:\varphi_{m_2}<\arg z<\varphi_{m_2+1}$, 以及 R_{j1} 的子序列 R_{j2}, $\lim\limits_{j\to\infty}R_{j2}=\infty$, 使得在弧段$\{R_{j2}e^{i\varphi}:\varphi_{m_2}<\varphi<\varphi_{m_2+1}\}$上适合关系式

$$\log\frac{1}{|f(R_{j2}e^{i\varphi})-a_2|}>\frac{\delta}{2^{\lambda+4}}U(R_{j2})$$

的 φ 值构成集合,其测度大于 $\dfrac{K}{q}$.

如上对 $f(z)$, a_2, G_2, 数列 R_{j2}, $K'=\dfrac{K}{q}$ 应用引理 7.3 则在弧段$\{R_{j2}e^{i\varphi}:\varphi_{m_2}+10\alpha<\varphi<\varphi_{m_2+1}-10\alpha\}$上有

$$\log \frac{1}{|f(R_{j2}e^{i\varphi})-a_2|} > \frac{\delta}{2^{\lambda+4}\left\{4\left(5+4\log\frac{2}{h}\right)\right\}^{2N_1}} U(R_{j2}). \tag{7.4.23}$$

角域 G_1 与 G_2 不能相邻. 事实上，如若不然，例如

$$\varphi_{m_2} = \varphi_{m_1+1}, \text{ 取 } \varepsilon = \min\left(\frac{K}{2q}, \frac{\pi}{4\lambda}\right)$$

而考虑角域 G_1': $\varphi_{m_1} < \arg z < \varphi_{m_1+1} - \varepsilon$ 与 G_2': $\varphi_{m_2} + \varepsilon < \arg z < \varphi_{m_2+1}$. 对于 $f(z)$，两个判别的有穷复数 a_1, a_2 以及角域

$$G_1', G_2', \eta = \frac{\delta}{2^{\lambda+4}}, \quad K' = \frac{K}{2q}$$

应用引理 7.5，于是 G_1' 的任意边与 G_2' 的任意边的夹角不小于 $\frac{\pi}{\lambda}$. 即

$$2\varepsilon = (\varphi_{m_2} + \varepsilon) - (\varphi_{m_1+1} - \varepsilon) \geqslant \frac{\pi}{\lambda}.$$

这与 ε 的取法相矛盾.

在 $G_1 \cup G_2$ 内，使不等式

$$\log \frac{1}{|f(R_{j2}e^{i\varphi}) - a_\nu|} > \frac{\delta}{2^{\lambda+4}} U(R_{j2})$$

$$\left(j > j_0, \nu = 3, 4, \cdots, \left[\frac{q}{2}\right] + 1\right)$$

之一成立的点 $z = R_{j2}e^{i\varphi}$，其 φ 值构成集合的测度至多为

$$40\alpha < \frac{2K}{q},$$

从而在开平面除去 G_1, G_2 后所余下的 $q-2$ 个角域 $\varphi_m < \arg z < \varphi_{m+1}$ $(m \neq m_1, m_2)$ 内至少有一个，例如 G_3: $\varphi_{m_3} < \arg z < \varphi_{m_3+1}$，以及 R_{j2} 的子序列 R_{j3}，对于 a_3 具有类似的性质. 如上可证 G_3 与 G_1、G_2 均不相邻.

将此步骤继续下去，相应于 $\left[\frac{q}{2}\right] + 1$ 个亏值

$$a_\nu\left(\nu=1,2,\cdots,\left[\frac{q}{2}\right]+1\right)$$

便存在 $\left[\frac{q}{2}\right]+1$ 个角域 $G_\nu:\varphi_{m_\nu}<\arg z<\varphi_{m_\nu+1}$

$$\left(\nu=1,2,\cdots,\left[\frac{q}{2}\right]+1\right)$$

以及一列正数 $R_{j,[\frac{q}{2}]+1}$, $\lim\limits_{j\to\infty}R_{j,[\frac{q}{2}]+1}=\infty$,使得在弧段

$$\{R_{j,[\frac{q}{2}]+1}e^{i\varphi}:\varphi_{m_\nu}+10\alpha<\varphi<\varphi_{m_\nu+1}-10\alpha\}$$

上有

$$\log\frac{1}{|f(R_{j,[\frac{q}{2}]+1}e^{i\varphi})-a_\nu|}>\frac{\delta}{2^{\lambda+1}\left\{4\left(5+4\log\frac{2}{h}\right)\right\}^{3N_1}}$$

$$\times U(R_{j,[\frac{q}{2}]+1})\quad\left(\nu=1,2,\cdots,\left[\frac{q}{2}\right]+1\right).\qquad(7.4.24)$$

这 $\left[\frac{q}{2}\right]+1$ 个角域 G_ν 互不相交,互不相邻. 但是 q 条 Borel 方向 B_m 将开平面分为 q 个角域 $\varphi_m<\arg z<\varphi_{m+1}$($m=1,2,\cdots,q$),其中至多只有 $\left[\frac{q}{2}\right]$ 个角域互不相交,且互不相邻. 这便推得矛盾,定理即得证.

定理 7.7 结论中的估计式 $p\leqslant\frac{q}{2}$ 是精确的. 例如对于任意正整数 n,我们可以举出有穷正级的整函数,其有穷亏值总数等于 n,而其 Borel 方向总数等于 $2n$.

事实上,$n=1$ 时 e^z 就提供了这样的例子. e^z 的级为 1,它有一个有穷亏值 0,有两条 Borel 方向:正负虚轴. 当 $n\geqslant2$ 时考察函数

$$f(z)=\int_0^z e^{-t^n}dt.$$

可以看出,对于任意小的正数 ε,在角域

$$\left|\arg z - \frac{2\pi l}{n}\right| \leqslant \frac{\pi}{2n} - \varepsilon \qquad (l = 1, 2, \cdots, n)$$

上 $f(z)$ 一致地趋向于

$$\lim_{R\to\infty}\int_0^{Re^{i\frac{2\pi l}{n}}} e^{-t^n}dt = e^{i\frac{2\pi l}{n}}\int_0^{\infty} e^{-t^n}dt = a_l.$$

并且

$$\begin{aligned} f(z) - a_l &= -\int_z^{\infty} e^{-t^n}dt \\ &= \frac{-e^{-z^n}}{nz^{n-1}} + \frac{n-1}{n}\int_z^{\infty}\frac{e^{-t^n}}{t^n}dt \\ &= -\frac{e^{-z^n}}{nz^{n-1}}(1 + o(1)). \end{aligned} \tag{7.4.25}$$

因此

$$\begin{aligned} m\left(r, \frac{1}{f - a_l}\right) &\geqslant \frac{1}{2\pi}(1 + o(1))r^n\int_{-\frac{\pi}{2n}+\varepsilon}^{\frac{\pi}{2n}-\varepsilon}\cos n\theta d\theta \\ &= \frac{1}{\pi}(1 + o(1))r^n\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - n\varepsilon\right)}{n} \\ &\geqslant (1 + o(1))\left(\frac{1}{n\pi} - \frac{\varepsilon}{\pi}\right)r^n \quad (l = 1, 2, \cdots, n). \end{aligned}$$

类似地在角域

$$\left|\arg z - \frac{(2l-1)\pi}{n}\right| \leqslant \frac{\pi}{2n} - \varepsilon \quad (l = 1, 2, \cdots, n)$$

内 $f(z)$一致地趋向于 ∞，并且

$$f(z) = \int_0^z e^{-t^n}dt = \frac{e^{-z^n}\{1 + o(1)\}}{nz^{n-1}} + O(1). \tag{7.4.26}$$

于是

$$m(r, f) = (1+o(1))\frac{r^n}{\pi}.$$

从而 $f(z)$的级为 n，且有 n 个有穷亏值 $a_l(l = 1, 2, \cdots, n)$，

$$\delta(a_l, f) = \frac{1}{n}.$$

另一方面，$f'(z) = e^{-z^n}$ 有 $2n$ 条 Borel 方向：

$$\arg z = \frac{(2k-1)}{2n}\pi \quad (k = 1, 2, \cdots, 2n).$$

根据定理 6.3 的系 2，这些半直线也是 $f(z)$ 的 Borel 方向. 再根据 $f(z)$ 的渐近性质(7.4.25)与(7.4.26)可知 $f(z)$ 没有其他的 Borel 方向. 因此 $f(z)$ 恰有 $2n$ 条 Borel 方向.

7.4.3. 整函数的亏值总数与级

倘若我们假定有穷正级整函数的 Borel 方向数目有穷，则还可以使亏值数目与级相联系.

定理 7.8. 设 $f(z)$ 为 $\lambda(0 < \lambda < \infty)$ 级整函数. 若 $f(z)$ 的 Borel 方向总数 q 有穷，则 $f(z)$ 的有穷亏值总数 $p < 2\lambda$.

证. 当 $\lambda > \frac{1}{2}$ 时，假设定理结论不成立，则在 $f(z)$ 的有穷亏值中可取出 $p'(2\lambda \leqslant p' < \infty)$ 个，互相判别，记为 $a_\nu(\nu = 1, 2, \cdots, p')$. 又记 $f(z)$ 的 q 条 Borel 方向为 $B_m: \arg z = \varphi_m(m = 1, 2, \cdots, q; 0 \leqslant \varphi_1 < \varphi_2 < \cdots < \varphi_q < \varphi_{q+1} = 2\pi + \varphi_1)$. 如同定理 7.7 证明的推理，相应于 p' 个亏值 $a_\nu(\nu = 1, 2, \cdots, p')$，存在 p' 个角域 $G_\nu: \varphi_{m_\nu} < \arg z < \varphi_{m_\nu+1}$ 互不相交，互不相邻，以及存在一列正数 $R_{jp'}$，$\lim\limits_{j\to\infty} R_{jp'} = \infty$，使得在弧段 $\{R_{jp'}e^{i\varphi}: \varphi_{m_\nu} + 10\alpha < \varphi < \varphi_{m_\nu+1} - 10\alpha\}$ 上有

$$\log\frac{1}{|f(R_{jp'}e^{i\varphi}) - a_\nu|} > \frac{\delta}{2^{\lambda+4}\left\{4\left(5 + 4\log\frac{2}{h}\right)\right\}^{3N_1}} U(R_{jp'})$$

$$(\nu = 1, 2, \cdots, p'). \tag{7.4.27}$$

于此，α 为充分小的正数，

$$\alpha < \min_{1\leqslant m\leqslant q}\left(\frac{K}{20q}, \frac{\varphi_{m+1} - \varphi_m}{40}\right), \quad N_1 = \left[\frac{\pi}{\alpha}\right] + 1,$$

$$h=\frac{K}{80(2e+1)(\pi+\alpha)q},\qquad \delta=\min_{1\le\nu\le p'}\{\delta(a_\nu,f)\},$$

$K=K(\delta,p',\lambda)$，$U(r)=r^{\lambda(r)}$，$\lambda(r)$是$f(z)$的一精确级.

无妨设 $0\leqslant\varphi_{m_1}<\varphi_{m_1+1}<\varphi_{m_2}<\varphi_{m_2+1}<\cdots<\varphi_{m_{p'}}<\varphi_{m_{p'}+1}<\varphi_{m_{p'+1}}=2\pi+\varphi_{m_1}$，否则只要将 $a_\nu(\nu=1,2,\cdots,p')$ 重新编号即可. 对于 G_ν 和 $G_{\nu+1}(1\leqslant\nu\leqslant p',G_{p'+1}=G_1)$，函数 $f(z)$，复数 a_ν 和 $a_{\nu+1}$，

$$\eta=\frac{\delta}{2^{\lambda+4}\left\{4\left(5+4\log\frac{2}{h}\right)\right\}^{3N_1}},$$

$$K'=\min_{1\le m\le q}\left(\frac{\varphi_{m+1}-\varphi_m}{2}\right).$$

应用引理 7.5，则 G_ν 的任意边和 $G_{\nu+1}$ 的任意边的夹角不小于 $\frac{\pi}{\lambda}$. 即

$$\varphi_{m_{\nu+1}}-\varphi_{m_\nu+1}\geqslant\frac{\pi}{\lambda}\qquad(\nu=1,2,\cdots,p').$$

于是

$$\sum_{\nu=1}^{p'}(\varphi_{m_{\nu+1}}-\varphi_{m_\nu+1})\geqslant p'\frac{\pi}{\lambda}\geqslant 2\pi.$$

从而

$$\sum_{\nu=1}^{p'}(\varphi_{m_{\nu+1}}-\varphi_{m_\nu+1})+\sum_{\nu=1}^{p'}(\varphi_{m_\nu+1}-\varphi_{m_\nu})>2\pi.\qquad(7.4.28)$$

但是上述不等式左端显然应等于 2π. 这样便在 $\lambda>\frac{1}{2}$ 时证明了定理.

当 $\lambda\leqslant\frac{1}{2}$ 时，如果 $f(z)$ 有有穷亏值，则取出一个记为 a_1. 对 $f(z)$ 与它的两个亏值∞与 a_1 应用引理 7.1 可知存在一列趋于∞的正数 R_j'，对于每个充分大的 j 和 $\delta=\min(\delta(\infty,f),\delta(a_1,f))$，使

$$\log |f(R'_j e^{i\varphi})| > \frac{\delta}{2^{\lambda+4}} U(R_j) \tag{7.4.29}$$

以及

$$\log \frac{1}{|f(R'_j e^{i\varphi}) - a_1|} > \frac{\delta}{2^{\lambda+4}} U(R_j) \tag{7.4.30}$$

分别成立的值 $\varphi(0 \leqslant \varphi < 2\pi)$ 构成的两个集合的测度都大于一个确定的正数 K。

由于$f(z)$的 Borel 方向 $B_m: \arg z = \varphi_m (m = 1, 2, \cdots, q)$是有穷条，于是存在角域设为 $G_1: \varphi_1 < \arg z < \varphi_2$ 以及 R'_j 的子序列 R_j 使得对每个 j 适合

$$\log \frac{1}{|f(R_j e^{i\varphi}) - a_1|} > \frac{\delta}{2^{\lambda+4}} U(R_j)$$

的值 $\varphi(\varphi_1 < \varphi < \varphi_2)$ 构成的集合的测度大于 $\frac{K}{q}$。再应用引理7.3，对于充分小的正数 α 和大于 1 的正数 $Q, Q < \frac{1}{4\alpha}$，当 j 充分大时在区域

$$D_j: \left(\frac{R_j}{Q} \leqslant |z| \leqslant QR_j\right) \cap (\varphi_1 + 10\alpha \leqslant \arg z \leqslant \varphi_2 - 10\alpha)$$

上有

$$\log |f(z) - a_1| < -\frac{\delta}{2^{\lambda+4}\left\{4\left(5 + 4\log\frac{2}{h}\right)\right\}^{2N_1+N_2}} U(R_j). \tag{7.4.31}$$

其中 N_1, N_2, h 仍如(7.4.4)确定.

取充分小的正数 α 使 $\varphi_1 + 2\pi - \varphi_2 + 20\alpha < \frac{\pi}{\lambda}$. 在 $\varphi_2 - 10\alpha < \arg z < \varphi_1 + 10\alpha + 2\pi$ 内，如同引理 7.5，设N 为待定的正数且 $e^N > 36$，考察区域

$$D: \left(\frac{R_j}{e^N} \leqslant |z| \leqslant e^N R_j\right) \cap (\varphi_2 - 10\alpha \leqslant \arg z \leqslant \varphi_1 + 10\alpha + 2\pi).$$

其边界记为 Γ. $\Gamma_\nu(\nu=1,2,3,4)$由(7.4.18)确定.

若 $R_je^{i\varphi}\in D$, 则

$$\log|f(R_je^{i\varphi})-a_1|\leqslant\sum_{\nu=1}^{4}\omega(R_je^{i\varphi},\Gamma_\nu,D)\times\max_{z\in\Gamma_\nu}(\log|f(z)-a_1|). \tag{7.4.32}$$

仍应用引理7.5中的估计

$$\omega(R_je^{i\varphi},\Gamma_1,D)>\frac{1}{2},$$

$$\omega(R_je^{i\varphi},\Gamma_2,D)<2e^{-\frac{\pi N}{\varphi_1-\varphi_2+2\pi+20\alpha}},$$

$$\omega(R_je^{i\varphi},\Gamma_3,D)<2e^{-\frac{N}{2}}.$$

当 j 充分大时,在(7.4.31)中取 $Q=36$, 有

$$\max_{z\in\Gamma_1}|f(z)-a_1|<-K^*U(R_j)$$

$$\left(K^*=\frac{\delta}{2^{\lambda+4}\left\{4\left(5+4\log\frac{2}{h}\right)\right\}^{2N_1+N_2}}\right),$$

取 $Q=e^N$ 时,有

$$\max_{z\in\Gamma_4}|f(z)-a_1|<0.$$

$f(z)$是 λ 级整函数,当 r 充分大时,有

$$\max_{|z|=r}\log|f(z)-a_1|\leqslant\frac{2r+r}{2r-r}m(2r,f-a_1)$$

$$=3m(2r,f)+O(1).$$

从而当 j 充分大时,有

$$\max_{z\in\Gamma_2}\log|f(z)-a_1|<3m(2e^NR_j,f)+O(1)$$
$$<4(2e^N)^\lambda U(R_j),$$

$$\max_{z\in\Gamma_3}\log|f(z)-a_1|<3m(2e^{-N}R_j,f)+O(1)$$
$$<4U(R_j).$$

将以上这些估计代回(7.4.32),便得

$$\log|f(R_je^{i\varphi})-a_1|$$
$$<\left\{-\frac{K^*}{2}+2^{\lambda+3}e^{-N\left(\frac{\pi}{\varphi_1+2\pi-\varphi_2+20\alpha}-\lambda\right)}+8e^{-\frac{N}{2}}\right\}U(R_j).$$

注意 $\frac{\pi}{\varphi_1+2\pi-\varphi_2+20\alpha}>\lambda$，取$N$充分大可使

$$-\frac{K^*}{2}+2^{\lambda+3}e^{-N\left(\frac{\pi}{\varphi_1+2\pi-\varphi_2+20\alpha}-\lambda\right)}+8e^{-\frac{N}{2}}<-\frac{K^*}{4}.$$

因此对于 $\varphi_2-10\alpha<\varphi<\varphi_1+10\alpha+2\pi$，有

$$\log|f(R_je^{i\varphi})-a_1|<-\frac{K^*}{4}U(R_j).$$

结合到(7.4.31)可知在 $|z|=R_j$ 上一致地有 $f(z)\to a_1$，但是(R_j)是(R'_j)的子序列，这与在 $|z|=R'_j$ 上使(7.4.29)成立的值 φ 构成正测度集相矛盾.

从定理 7.8 的证明不难看出，Borel 方向数目为有穷的条件可以放宽为：$f(z)$ 的所有 Borel 方向与正实轴的夹角

$$\varphi(0\leqslant\varphi<2\pi)$$

值的导集构成零测度集．对于级

$$\lambda<\frac{1}{2}$$

的整函数 $f(z)$，从以后的定理 8.6 的系 2 可以知道不需要任何其他条件，$f(z)$不能有有穷亏值.

杨乐，张广厚曾经把定理 7.7 与定理 7.8 推进到包括$f(z)$的各级导数与原函数的有穷非零亏值数目的情况.

关于有穷下级的整函数与亚纯函数，张广厚[3]曾对其亏值数目，Julia 方向的数目与渐近值数目间的关系作了较多的研究，有兴趣的读者请阅读原文.

第八章　展布关系及其应用

近二十多年来，在亚纯函数值分布理论的新发展中，许多结果是有关亏值和亏量的研究.

设 $f(z)$ 为开平面上的超越亚纯函数，a 为一任意复数. 在第一章里我们已经知道，称 a 是 $f(z)$ 的一个亏值，若

$$\delta(a, f) = \varliminf_{r\to\infty} \frac{m\left(r, \frac{1}{f-a}\right)}{T(r, f)} > 0.$$

那么 $\delta(a, f) > 0$ 的实质又是什么呢？ 粗略地看来，它是指对于每个适当大的 r 值，在圆周 $|z| = r$ 上 $f(z)$ 十分"接近"于 a 的点必须"很多". 在本章里我们将精确地描述这个事实，即证明所谓展布关系，并论述它在一些问题上的应用.

§8.1. Pólya 峰及其存在性

8.1.1. 定义和引理

为了以后的需要，我们先引入 Pólya 峰的概念，它在函数值分布论的近代研究中具有重要的作用. 以下这种形式的 Pólya 峰首先是由 A.Edrei[3] 引进的.

定义 8.1. 设函数 $f(z)$ 于开平面亚纯，下级 μ 有穷. 一个正数序列 (r_j) 称为 $f(z)$ 的 μ 级 Pólya 峰序列或简称为 Pólya峰，若相应地有三个序列 (r_j')，(r_j'')，(ε_j) 适合条件

$$r_j' \to \infty, \frac{r_j}{r_j'} \to \infty, \frac{r_j''}{r_j} \to \infty, \varepsilon_j \to 0 (j \to \infty). \quad (8.1.1)$$

并且当 $r_j' \leqslant t \leqslant r_j''$ 时有

$$\frac{T(t,f)}{T(r_j,f)} \leqslant (1+\varepsilon_j)\left(\frac{t}{r_j}\right)^{\mu}. \tag{8.1.2}$$

在证明 $f(z)$的 μ 级 Pólya 峰存在之前，我们建立两个引理.

引理 8.1. 设 $\varphi(t)$, $\psi(t)$ 是在 $t \geqslant t_0$ 定义的连续正值函数，$\psi(t)$是非减的，并且

$$\lim_{t\to\infty} \varphi(t) = \infty, \tag{8.1.3}$$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\varphi(t)}{\psi(t)} = 0, \tag{8.1.4}$$

则对于任给的正数 $r_0 \geqslant t_0$, 存在值 $r > r_0$ 使得

$$\varphi(t) \leqslant \varphi(r) \qquad (t_0 \leqslant t < r) \tag{8.1.5}$$

与

$$\frac{\varphi(t)}{\psi(t)} \leqslant \frac{\varphi(r)}{\psi(r)} \qquad (t \geqslant r). \tag{8.1.6}$$

证. 由于(8.1.3),存在 $u_0 > r_0$ 使

$$\varphi(u_0) = \max_{t_0 \leqslant t \leqslant u_0} \varphi(t).$$

$\frac{\varphi(t)}{\psi(t)}$是 $t \geqslant t_0$ 时的连续正值函数，并且满足 (8.1.4),于是存在 $u_1 \geqslant u_0$ 使

$$\frac{\varphi(u_1)}{\psi(u_1)} = \max_{t \geqslant u_0} \frac{\varphi(t)}{\psi(t)}. \tag{8.1.7}$$

因为 $\varphi(t)$ 连续，存在值 r, $u_0 \leqslant r \leqslant u_1$ 使得

$$\varphi(r) = \max_{u_0 \leqslant t \leqslant u_1} \varphi(t) = \max_{t_0 \leqslant t \leqslant u_1} \varphi(t). \tag{8.1.8}$$

因此(8.1.5)成立. 再由(8.1.7), (8.1.8), $r \leqslant u_1$ 以及 $\psi(t)$ 是非减函数,故当 $t \geqslant u_1$ 时有

$$\frac{\varphi(t)}{\psi(t)} \leqslant \frac{\varphi(u_1)}{\psi(u_1)} \leqslant \frac{\varphi(r)}{\psi(r)}.$$

引理 8.2. 设 $\varphi(t)$是 $t \geqslant t_0 > 0$ 上定义的连续非减函数. 若存在数σ和τ使得 $0 < \sigma < \tau$, 并且

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{\varphi(t)}{t^\tau} = \infty, \tag{8.1.9}$$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\varphi(t)}{t^\sigma} = 0, \tag{8.1.10}$$

则对于任给的正数 $r_0 \geqslant t_0$，存在值 $r > r_0$ 使

$$\frac{\varphi(t)}{t^\tau} \leqslant \frac{\varphi(r)}{r^\tau} \qquad (t_0 \leqslant t \leqslant r^{\frac{\tau}{\sigma}}). \tag{8.1.11}$$

证．由(8.1.9)存在 $r_1 > r_0$ 使得

$$\frac{\varphi(r_1)}{r_1^\tau} = \max_{t_0 \leqslant t \leqslant r_1} \left\{\frac{\varphi(t)}{t^\tau}, 1\right\}. \tag{8.1.12}$$

根据(8.1.10)可以选取 r_2 使

$$\varphi(r_2) < r_2^\sigma \text{ 以及 } r_2 > r_1^{\frac{\tau}{\sigma}}. \tag{8.1.13}$$

置

$$r_3 = r_2^{\frac{\sigma}{\tau}}, \tag{8.1.14}$$

有 $t_0 < r_0 < r_1 < r_3 < r_2$．由于 $\frac{\varphi(t)}{t^\tau}$ 是 $t \geqslant t_0$ 时的连续函数，存在 r，$r_1 \leqslant r \leqslant r_3$，使得

$$\frac{\varphi(r)}{r^\tau} = \max_{r_1 \leqslant t \leqslant r_3} \frac{\varphi(t)}{t^\tau}. \tag{8.1.15}$$

比较(8.1.12)与(8.1.15)两式有

$$\frac{\varphi(r)}{r^\tau} \geqslant \frac{\varphi(t)}{t^\tau} \qquad (t_0 \leqslant t \leqslant r_3). \tag{8.1.16}$$

为了证明(8.1.16)对于 $r_3 \leqslant t \leqslant r_2$ 成立，我们注意到 $\varphi(t)$ 是非减的，于是由(8.1.13)，(8.1.14)与(8.1.12)有

$$\varphi(t) \leqslant \varphi(r_2) < r_2^\sigma = r_3^\tau \leqslant t^\tau \leqslant t^\tau \frac{\varphi(r_1)}{r_1^\tau}.$$

故当 $r_3 \leqslant t \leqslant r_2$ 时有

$$\frac{\varphi(t)}{t^\tau} < \frac{\varphi(r_1)}{r_1^\tau} \leqslant \frac{\varphi(r)}{r^\tau}. \tag{8.1.17}$$

联合(8.1.16)与(8.1.17),即知(8.1.11)当 $t_0\leqslant t\leqslant r_2$ 时成立.
但

$$r_2=r_3^{\frac{\tau}{\sigma}}\geqslant r^{\frac{\tau}{\sigma}},$$

于是(8.1.11)对于 $t_0\leqslant t\leqslant r^{\frac{\tau}{\sigma}}$ 成立.

8.1.2. Pólya 峰的存在性.

定理 8.1. 设函数 $f(z)$ 于开平面亚纯,下级 μ 有穷,则存在一个正数序列 (r_j) 使得

$\lim\limits_{j\to\infty}\frac{r_j}{j}=\infty$,并且对于 $\left[\frac{r_j}{j},\ jr_j\right]$ 上的任意值 t 有

$$T(t,f)\leqslant(1+\varepsilon_j)\left(\frac{t}{r_j}\right)^{\mu}T(r_j,f), \tag{8.1.18}$$

其中 $\lim\limits_{j\to\infty}\varepsilon_j=0$.

证. 选取单调递降的正数序列 $\varepsilon_j=\dfrac{1}{(\log j)^2}(j=2,3,\cdots)$.

区分两种情况.

(1) $f(z)$ 的级 $\lambda=\mu$.

任取 $r_2>0$. 当 r_{j-1} 取定后,我们将选取 r_j.

对于每个固定的 j, 由于

$$\lim_{t\to\infty}\frac{T(t,f)}{t^{\mu-\varepsilon_j}}=\infty,\ \lim_{t\to\infty}\frac{T(t,f)}{t^{\mu+\varepsilon_j}}=0.$$

若令

$$\varphi(t)=\frac{T(t,f)}{t^{\mu-\varepsilon_j}},\ \phi(t)=t^{2\varepsilon_j},$$

则它们满足引理 8.1 的条件, 于是存在 $r_j>\max(j^2,\ r_{j-1})$ 适合

$$\frac{T(t,f)}{t^{\mu-\varepsilon_j}}\leqslant\frac{T(r_j,f)}{r_j^{\mu-\varepsilon_j}}\qquad(1\leqslant t<r_j), \tag{8.1.19}$$

$$\frac{T(t,f)}{t^{\mu+\varepsilon_j}}\leqslant\frac{T(r_j,f)}{r_j^{\mu+\varepsilon_j}}\qquad(t\geqslant r_j). \tag{8.1.20}$$

当 $\frac{r_j}{j} \leqslant t \leqslant jr_j$ 时有

$$\max\left\{\left(\frac{r_j}{t}\right)^{\varepsilon_j}, \left(\frac{t}{r_j}\right)^{\varepsilon_j}\right\} \leqslant j^{\varepsilon_j} = e^{\frac{1}{\log j}}.$$

于是从(8.1.19)与(8.1.20)有

$$T(t,f) \leqslant e^{\frac{1}{\log j}}\left(\frac{t}{r_j}\right)^{\mu} T(r_j,f) \qquad \left(\frac{r_j}{j} \leqslant t \leqslant jr_j\right). \tag{8.1.21}$$

由 $\lim\limits_{j\to\infty} e^{\frac{1}{\log j}} = 1$，这时定理结论已经成立。

(2) $f(z)$ 的级 $\lambda > \mu$.

取 j_0 适当大使 $j \geqslant j_0$ 时有 $\varepsilon_j < \lambda - \mu$. 任取 $r_{j_0} > 0$，当 $r_{j-1}(j \geqslant j_0 + 1)$ 选定后，我们将选取 r_j. 对于每个固定的 j，由于

$$\varlimsup_{t\to\infty} \frac{T(t,f)}{t^{\mu+\varepsilon_j}} = \infty,$$

$$\varliminf_{t\to\infty} \frac{T(t,f)}{t^{\mu+\frac{\varepsilon_j}{2}}} = 0.$$

若令 $\varphi(t) = T(t,f)$，$\sigma = \mu + \frac{\varepsilon_j}{2}$，$\tau = \mu + \varepsilon_j$，则它们满足引理 8.2 的条件，于是存在 $r_j > \max\left(j^{\frac{2\mu+\varepsilon_j}{\varepsilon_j}}, r_{j-1}\right)$ 适合

$$\frac{T(t,f)}{t^{\mu+\varepsilon_j}} \leqslant \frac{T(r_j,f)}{r_j^{\mu+\varepsilon_j}} \qquad \left(1 \leqslant t \leqslant r_j^{\frac{\mu+\varepsilon_j}{\mu+\frac{\varepsilon_j}{2}}}\right).$$

从而(8.1.21)在这种情况也成立.

§8.2. T^* 函 数

8.2.1. T^* 函数的定义与连续性

A.Baernstein[1]证明展布关系时，关键在于引进了一个重要的辅助函数，他称之为 T^* 函数. 后来 T^* 函数在最小模问题，单叶函数的系数估计上面也取得了应用. 请先述其定义.

定义 8.2. 设函数 $f(z)$ 于开平面亚纯，不恒为 0．对于

$$z=re^{i\theta},\ 0<r<\infty,\ 0\leqslant\theta\leqslant\pi,$$

置

$$m^*(z)=\sup_E\frac{1}{2\pi}\int_E\log|f(re^{i\varphi})|d\varphi. \tag{8.2.1}$$

这里的上确界是对$(-\pi,\pi)$上的测度为2θ的所有的可测集E来取的.

再置

$$T^*(z)=m^*(z)+N(|z|,f). \tag{8.2.2}$$

显然 $T^*(z)$在

$$H=\{z:Im z\geqslant 0,\ z\neq 0\}$$

上有定义，并且对于 $0<r<\infty$

$$T(r,f)=\sup_{0\leqslant\theta\leqslant\pi}T^*(re^{i\theta}),$$

$$N(r,f)=T^*(r),$$

以及由 Jensen 公式有

$$N\left(r,\frac{1}{f}\right)=T^*(re^{i\pi})+C.$$

这里C为仅依于f的常数.

$T^*(z)$ 最重要的性质是它是H上的连续的次调和函数．在这一小节里我们先证明其连续性，为此需要下述引理.

引理 8.3. 设 $f(z)$于开平面亚纯，不恒为 0．$m^*(z)$由(8.2.1)定义，$z=re^{i\theta}$，则必存在测度为2θ的可测集E使

$$m^*(z)=\frac{1}{2\pi}\int_E\log|f(re^{i\varphi})|d\varphi.$$

证．当 $\theta=0$ 或 $\theta=\pi$ 时，引理 8.3 的结论是显然的．当 $0<\theta<\pi$ 时考虑分布函数

$$\lambda(t)=\text{mes}\{\varphi:\log|f(re^{i\varphi})|>t\}.$$

容易看出 $\lambda(t)$是$-\infty<t<+\infty$ 上定义的非增函数，在每一点 t 右半连续．当 t 从$-\infty$增加到$+\infty$时，$\lambda(t)$ 从 2π 减少到 0．于是存在点 t_0，$-\infty<t_0<+\infty$，使

$$\lambda(t_0+) = \lambda(t_0) \leqslant 2\theta \leqslant \lambda(t_0-),$$

其中

$$\lambda(t_0+) = \lim_{\substack{t\to t_0\\ t>t_0}} \lambda(t), \qquad \lambda(t_0-) = \lim_{\substack{t\to t_0\\ t<t_0}} \lambda(t).$$

命

$$A = \{\varphi: \log|f(re^{i\varphi})| > t_0\},$$
$$B = \{\varphi: \log|f(re^{i\varphi})| \geqslant t_0\},$$

则

$$\text{mes}A = \lambda(t_0), \quad \text{mes}B = \lambda(t_0 - 0), \quad A \subset B.$$

在$[-\pi, \pi]$上取集合 E 使

$$\text{mes}E = 2\theta, \qquad A \subset E \subset B,$$

则 E 便满足引理的要求.

事实上，若在$[-\pi, \pi]$上另有集 F, $\text{mes}F = 2\theta$, 则

$$\begin{aligned}\int_F \log|f(re^{i\varphi})|d\varphi &= \int_F \{\log|f(re^{i\varphi})| - t_0\}d\varphi + 2\theta t_0\\ &\leqslant \int_{-\pi}^{\pi} \max\{0, \log|f(re^{i\varphi})| - t_0\}d\varphi + 2\theta t_0\\ &= \int_E \{\log|f(re^{i\varphi})| - t_0\}d\varphi + 2\theta t_0\\ &= \int_E \log|f(re^{i\varphi})|d\varphi.\end{aligned}$$

这就证明了引理结论.

定理 8.2. 设函数 $f(z)$于开平面亚纯，不恒为 0，则由(8.2.2)定义的 $T^*(z)$ 在 $H = \{z: Imz \geqslant 0, z \neq 0\}$ 上是连续函数.

证. 对于每点 $z = re^{i\theta}$, $0 < r < \infty$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, 根据引理 8.3 存在$[-\pi, \pi]$的子集 E, $\text{mes}E = 2\theta$, 使得

$$m^*(z) = \frac{1}{2\pi}\int_E \log|f(re^{i\varphi})|d\varphi.$$

记 $f(z) = \dfrac{f_1(z)}{f_2(z)}$,其中 $f_1(z)$, $f_2(z)$ 为整函数,没有公共零点，则

$$T^*(z)=\frac{1}{2\pi}\int_E\log|f(re^{i\varphi})|d\varphi+N(r,f)$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_E\log\left|\frac{f_1(re^{i\varphi})}{f_2(re^{i\varphi})}\right|d\varphi+N\left(r,\frac{1}{f_2}\right).$$

注意

$$N\left(r,\frac{1}{f_2}\right)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f_2(re^{i\varphi})|d\varphi+C,$$

则

$$T^*(z)=\frac{1}{2\pi}\int_E\log|f_1(re^{i\varphi})|d\varphi$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{CE}\log|f_2(re^{i\varphi})|d\varphi+C(f). \qquad (8.2.3)$$

为了证明 $T^*(z)$ 在 H 上的连续性，区分两种情况.

(1) 在 z 平面上，$f_1(z)$ 和 $f_2(z)$ 都没有零点. 任取 $0<R_1<R_2<\infty$，显然 $\log|f_1(z)|$ 和 $\log|f_2(z)|$ 都是 $R_1\leqslant|z|\leqslant R_2$ 上的连续函数. 设 $z_1=r_1e^{i\theta_1}$，$z_2=r_2e^{i\theta_2}$，$R_1\leqslant r_1<r_2\leqslant R_2$. 相应于 z_1，存在集 E_1，$\text{mes}E_1=2\theta_1$，使

$$T^*(z_1)=\frac{1}{2\pi}\int_{E_1}\log|f_1(r_1e^{i\varphi})|d\varphi$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{CE_1}\log|f_2(r_1e^{i\varphi})|d\varphi+C.$$

取适当小的正数 δ，当 $|z_2-z_1|<\delta$ 时，可以从 E_1 拼上或去掉一个小集合 e，获得测度为 $2\theta_2$ 的集合 E_2. 仅考虑前一种情况 $E_2=E_1\cup e$. (后一种情况 $E_2=E_1-e$ 与此类似.)根据定义

$$T^*(z_2)\geqslant\frac{1}{2\pi}\int_{E_2}\log|f(r_2e^{i\varphi})|d\varphi+N(r_2,f)$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{E_2}\log|f_1(r_2e^{i\varphi})|d\varphi+\frac{1}{2\pi}\int_{CE_2}\log|f_2(r_2e^{i\varphi})|d\varphi+C$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{E_1}\log|f_1(r_2e^{i\varphi})|d\varphi+\frac{1}{2\pi}\int_e\log|f_1(r_2e^{i\varphi})|d\varphi$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{CE_1}\log|f_2(r_2e^{i\varphi})|d\varphi$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_e\log|f_2(r_2e^{i\varphi})|d\varphi+C.$$

因此

$$T^*(z_1)-T^*(z_2)\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_{E_1}(\log|f_1(r_1e^{i\varphi})|$$

$$-\log|f_1(r_2e^{i\varphi})|)d\varphi+\frac{1}{2\pi}\int_{CE_1}(\log|f_2(r_1e^{i\varphi})|$$

$$-\log|f_2(r_2e^{i\varphi})|)d\varphi-\frac{1}{2\pi}\int_e\log|f_1(r_2e^{i\varphi})|d\varphi$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_e\log|f_2(r_2e^{i\varphi})|d\varphi.$$

由 $\log|f_1(z)|$, $\log|f_2(z)|$ 在 $R_1\leqslant|z|\leqslant R_2$ 上的一致连续性，以及当 $|z_2-z_1|<\delta$ 时有

$$|r_2-r_1|<\delta,$$

$$\operatorname{mes}e=|\theta_2-\theta_1|\leqslant\frac{|z_2-z_1|}{R_1}\frac{\pi}{2}<\frac{\pi}{2R_1}\delta.$$

于是可使 $T^*(z_1)-T^*(z_2)<\varepsilon$. 同样可证当 $|z_2-z_1|<\delta$ 时有 $T^*(z_2)-T^*(z_1)<\varepsilon$. 这就证明了 $T^*(z)$ 在 H 上的连续性.

(2) 在 z 平面上 $f_1(z)$ 和 $f_2(z)$ 有零点.

这时我们可以用连续函数来逼近它们. 对于 $R_1<|z|<R_2$ 与充分小的正数 δ 有

$$(A_\delta\log|f(z)|)=\frac{1}{\pi\delta^2}\int_0^\delta\int_{-\pi}^{\pi}\log|f(z+te^{i\omega})|td\omega dt.$$

类似地可定义 $A_\delta\log|f_1(z)|$ 与 $A_\delta\log|f_2(z)|$. 由于 $\log|f_1(z)|$ 与 $\log|f_2(z)|$ 是下调和函数，则

$$A_\delta\log|f_k(z)|\geqslant\log|f_k(z)|\qquad(k=1,2).$$

以下为符号简便计，我们命 $u_1=\log|f_1|$, $u_2=\log|f_2|$. $u=u_1-u_2, T^*(z)=T^*(z,u)$ 这时(8.2.3)化为 $T^*(z,u)-c(u)$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_E u_1(re^{i\varphi})d\varphi + \frac{1}{2\pi}\int_{CE} u_2(re^{i\varphi})d\varphi. \quad (8.2.3)'$$ 于是

$$T^*(z,u) - C(u) = \frac{1}{2\pi}\int_E u_1(re^{i\varphi})d\varphi + \frac{1}{2\pi}\int_{CE} u_2(re^{i\varphi})d\varphi$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_E A_\delta u_1(re^{i\varphi})\,d\varphi + \frac{1}{2\pi}\int_{CE} A_\delta u_2(re^{i\varphi})d\varphi$$

$$\leqslant T^*(z,\ A_\delta u) - C(A_\delta u).$$

对于 $re^{i\theta}$, $R_1<r<R_2$, $0\leqslant\theta\leqslant\pi$, 选取 E' 使 $\mathrm{mes}E'=2\theta$, 以及(8.2.3)对于 E' 与 $A_\delta u$ 成立,则

$$T^*(z,\ A_\delta u) - C(A_\delta u) = \frac{1}{2\pi}\int_{E'} A_\delta u_1(re^{i\varphi})d\varphi$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\int_{CE'} A_\delta u_2(re^{i\varphi})d\varphi,$$

另一方面可以看出

$$T^*(z,\ u) - C(u)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_E u_1(re^{i\varphi})d\varphi + \frac{1}{2\pi}\int_{CE} u_2(re^{i\varphi})d\varphi$$

$$\geqslant \frac{1}{2\pi}\int_{E'} u_1(re^{i\varphi})d\varphi + \frac{1}{2\pi}\int_{CE'} u_2(re^{i\varphi})d\varphi.$$

于是

$$0 \leqslant T^*(z,\ A_\delta u) - C(A_\delta u) - T^*(z,\ u) + C(u)$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{E'} (A_\delta u_1 - u_1)(re^{i\varphi})d\varphi$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\int_{CE'} (A_\delta u_2 - u_2)(re^{i\varphi})d\varphi$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (A_\delta u_1 - u_1)(re^{i\varphi})d\varphi$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(A_\delta u_2-u_2)(re^{i\varphi})d\varphi$$

$$=\frac{1}{2\pi}\{G(r,A_\delta u_1)-G(r,u_1)+G(r,A_\delta u_2)$$

$$-G(r,u_2)\}. \qquad (8.2.4)$$

这里

$$G(r,u)=\int_{-\pi}^{\pi}u(re^{i\varphi})d\varphi.$$

以下我们将证明

$$\lim_{\delta\to 0}G(r,A_\delta u_k)=G(r,u_k) \qquad (k=1,2) \qquad (8.2.5)$$

并且在 $R_1<r<R_2$ 上是一致趋向于上述极限，由 (8.2.4) 与 (8.2.5)可知在 $R_1<|z|<R_2$内，$T^*(z,u)-C(u)$是$T^*(z,A_\delta u)-C(A_\delta u)$一致趋近的极限．对于每个 δ，$A_\delta u_1$ 与 $A_\delta u_2$ 是连续函数，根据情况(1)$T^*(z,A_\delta u)-C(A_\delta u)$也是连续函数．因此它们一致趋近的极限函数 $T^*(z,u)-C(u)$也是连续函数．

为了证明(8.2.5)，我们注意到

$$G(r,A_\delta u_k)=\frac{1}{\pi\delta^2}\int_0^\delta tdt\int_{-\pi}^{\pi}d\theta\int_{-\pi}^{\pi}u_k(re^{i\theta}+te^{i\omega})d\omega.$$

但是对于 $0<t\leqslant\delta$ 有

$$\int_{-\pi}^{\pi}d\theta\int_{-\pi}^{\pi}u_k(re^{i\theta}+te^{i\omega})d\omega$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}d\theta\int_{-\pi}^{\pi}u_k(re^{i\theta}+te^{i(\omega+\theta)})d\omega$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}G(|r+te^{i\omega}|,u_k)d\omega$$

$$\leqslant 2\pi\sup\{G(s,u_k):|s-r|\leqslant\delta\},$$

于是

$$G(r,A_\delta u_k)\leqslant\sup\{G(s,u_k):|s-r|\leqslant\delta\} \qquad (k=1,2).$$

因此对于任给的 $\varepsilon>0$，当 δ 适当小时，无论 r 为 (R_1,R_2) 中的

什么值都有

$$G(r, A_\delta u_k) \leqslant G(r, u_k) + \varepsilon \qquad (k = 1, 2).$$

另一方面从 $G(r, u)$的定义易知

$$G(r, u_k) \leqslant G(r, A_\delta u_k). \qquad (k = 1, 2)$$

这就证明了(8.2.5)式. 从而 $T^*(z, u)$的连续性完全得证.

8.2.2. T^* 函数的下调和性

我们再证明 T^* 函数在上半平面除去原点外是下调和函数. 为此也需要一个引理.

命 T 为单位圆圆周上全体点构成的集合 $\{e^{i\theta}, 0 \leqslant \theta < 2\pi\}$. 对于 T 的一子集 E, 用 E_ε 表示集合$\{e^{i(\theta+\varepsilon)}: e^{i\theta} \in E\}$, $E_{-\varepsilon}$表示集合$\{e^{i(\theta-\varepsilon)}: e^{i\theta} \in E\}$.

引理 8.4. 若 E 为 T 的一可测子集, 且 $0 < \mathrm{mes}E < 2\pi$, 则存在正数 δ 使得当 $0 < \varepsilon < \delta$ 时有

$$\mathrm{mes}\{E_\varepsilon \cap E_{-\varepsilon}\} \leqslant \mathrm{mes}E - 2\varepsilon. \qquad (8.2.6)$$

证. 倘若 E 是一个区间, 或者是与一个区间仅相差一个零测度集, 则当 ε 适当小时引理的结论是显然的. 当 E 不是上述情况时, 必存在点 $0 < a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < 2\pi$, 使得 a_1, a_2 是 CE $(= T - E)$ 的密度为 1 的点[1], b_1, b_2 是 E 的密度为 1 的点. 取点 c 使 $b_1 < c < a_2$. 记 χ 为集 E 的特征函数, 则当 $\varepsilon > 0$ 时

$$\begin{aligned}
&\int_0^c \chi(t+\varepsilon)\chi(t-\varepsilon)dt \\
&\leqslant \int_0^{a_1} \chi(t+\varepsilon)dt + \int_{a_1}^{b_1} \chi(t-\varepsilon)dt + \int_{b_1}^{c} \chi(t+\varepsilon)dt \\
&= \int_0^c \chi(t+\varepsilon)dt - \int_{a_1}^{b_1} \chi(t+\varepsilon)dt + \int_{a_1}^{b_1} \chi(t-\varepsilon)dt \\
&= \int_0^c \chi(t+\varepsilon)dt + \int_{a_1-\varepsilon}^{a_1+\varepsilon} \chi(t)dt - \int_{b_1-\varepsilon}^{b_1+\varepsilon} \chi(t)dt.
\end{aligned}$$

由于 a_1 是 CE 的密度为 1 的点, b_1 是 E 的密度为 1 的点,

---

1) 参阅 Натансон[1,286页].

于是存在正数 δ 使当 $0<\varepsilon<\delta$ 时有

$$\int_{a_1-\varepsilon}^{a_1+\varepsilon}\chi(t)dt\leqslant\frac{\varepsilon}{2},\quad \int_{b_1-\varepsilon}^{b_1+\varepsilon}\chi(t)dt\geqslant\frac{3}{2}\varepsilon.$$

从而

$$\int_0^c\chi(t+\varepsilon)\chi(t-\varepsilon)dt\leqslant\int_0^c\chi(t+\varepsilon)dt-\varepsilon. \qquad (8.2.7)$$

类似地由

$$\int_c^{2\pi}\chi(t+\varepsilon)\chi(t-\varepsilon)dt\leqslant\int_c^{a_2}\chi(t+\varepsilon)dt$$

$$+\int_{a_2}^{b_2}\chi(t-\varepsilon)dt+\int_{b_2}^{2\pi}\chi(t+\varepsilon)dt$$

可得

$$\int_c^{2\pi}\chi(t+\varepsilon)\chi(t-\varepsilon)dt\leqslant\int_c^{2\pi}\chi(t+\varepsilon)dt-\varepsilon$$

$$(0<\varepsilon<\delta). \qquad (8.2.8)$$

结合(8.2.7),(8.2.8)两式,当 $0<\varepsilon<\delta$ 时即有

$$\text{mes}\,(E_\varepsilon\cap E_{-\varepsilon})=\int_0^{2\pi}\chi(t+\varepsilon)\chi(t-\varepsilon)dt$$

$$\leqslant\int_0^{2\pi}\chi(t+\varepsilon)dt-2\varepsilon=\text{mes}E-2\varepsilon.$$

定理 8.3. 设函数 $f(z)$ 于开平面亚纯,不恒为 0,则由(8.2.2)定义的 $T^*(z)$ 在 $H=\{z: Imz\geqslant 0,\ z\neq 0\}$ 内是下调和函数.

证.仍记 $f(z)=\dfrac{f_1(z)}{f_2(z)}$, 其中 $f_1(z)$, $f_2(z)$ 为整函数,没有公共零点.再记 $u(z)=\log|f(z)|$, $u_k(z)=\log|f_k(z)|$ $(k=1,2)$.设 ρ 为待定的充分小的正数,对于固定的正数 r 与实数 ϕ, 置

$$r(\phi)=|r+\rho e^{i\phi}|,\quad \alpha(\phi)=\arg(r+\rho e^{i\phi})$$

$$\left(|\arg z|<\frac{\pi}{2}\right).$$

故

$$r+\rho e^{i\phi}=r(\phi)e^{i\alpha(\phi)}.$$

容易看出 $r(\phi)=r(-\phi)$, $\alpha(\phi)=-\alpha(-\phi)$.

对于任何函数 v 有

$$\int_{-\pi}^{\pi} v(re^{i\varphi}+\rho e^{i\psi})d\psi$$

$$=\int_0^{\pi}\{v(re^{i\varphi}+\rho e^{i(\varphi+\psi)})+v(re^{i\varphi}+\rho e^{i(\varphi-\psi)})\}d\psi$$

$$=\int_0^{\pi}\{v(r(\psi)e^{i(\varphi+\alpha(\psi))})+v(r(\psi)e^{i(\varphi-\alpha(\psi))})\}d\psi. \qquad (8.2.9)$$

但是由(8.2.3)可知,对于 $re^{i\theta}$, $r_1<r<r_2$, $0<\theta<\pi$,有相应的集 E 使 $\mathrm{mes}E=2\theta$ 以及

$$T^*(re^{i\theta},u)-C(u)=\frac{1}{2\pi}\int_E u_1(re^{i\varphi})d\varphi$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_F u_2(re^{i\varphi})d\varphi, \qquad (8.2.10)$$

其中 $F=CE$.

u_1 和 u_2 是下调和函数,对于充分小的 ρ 与 $k=1,2$ 有

$$u_k(re^{i\varphi})\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\{u_k(r(\psi)e^{i(\varphi+\alpha(\psi))})+u_k(r(\psi)e^{i(\varphi-\alpha(\psi))})\}d\psi.$$

于是由(8.2.10)与上式有

$$T^*(re^{i\theta},u)-C(u)\leqslant\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2$$

$$\times\int_0^{\pi}\{\textstyle\int_{E_{\alpha(\psi)}}+\int_{E_{-\alpha(\psi)}}u_1(r(\psi)e^{i\varphi})d\varphi\}d\psi$$

$$+\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2\int_0^{\pi}\{\textstyle\int_{F_{\alpha(\psi)}}+\int_{F_{-\alpha(\psi)}}u_2(r(\psi)e^{i\varphi})d\varphi\}d\psi. \quad (8.2.11)$$

命 δ 为引理 8.4 中关于集 E 确定的正数，取 ρ 充分小使对任意的 ψ，$0\leqslant\psi\leqslant\pi$，有 $0\leqslant\alpha(\psi)<\delta$ 与 $\theta+\alpha(\psi)\leqslant\pi$. 根据引理 8.4 的结论有

$$\mathrm{mes}\{E_{\alpha(\psi)}\cap E_{-\alpha(\psi)}\}\leqslant\mathrm{mes}E-2\alpha(\psi).$$

于是可以选择集 C，满足

(i) $C\subset(E_{\alpha(\psi)}\cup E_{-\alpha(\psi)})-(E_{\alpha(\psi)}\cap E_{-\alpha(\psi)})$.

(ii) 如果记 $A=(E_{\alpha(\psi)}\cap E_{-\alpha(\psi)})\cup C$, 则

$$\mathrm{mes}A=\mathrm{mes}E-2\alpha(\psi)=2(\theta-\alpha(\psi)), \qquad (8.2.12)$$

置 $B=(E_{\alpha(\psi)}\cup E_{-\alpha(\psi)})-C$,则

$$A\cup B=E_{\alpha(\psi)}\cup E_{-\alpha(\psi)},\quad A\cap B=E_{\alpha(\psi)}\cap E_{-\alpha(\psi)}. \tag{8.2.13}$$

因为

$$\begin{aligned}\text{mes}A+\text{mes}B&=\text{mes}(A\cap B)+\text{mes}(A\cup B)\\&=\text{mes}(E_{\alpha(\psi)}\cap E_{-\alpha(\psi)})+\text{mes}(E_{\alpha(\psi)}\cup E_{-\alpha(\psi)})\\&=\text{mes}E_{\alpha(\psi)}+\text{mes}E_{-\alpha(\psi)}=4\theta,\end{aligned}$$

所以由(8.2.12)有

$$\text{mes}B=2(\theta+\alpha(\psi)). \tag{8.2.14}$$

设 $g(\varphi)$ 为任一可积函数,从(8.2.13)

$$\begin{aligned}\int_A g(\varphi)d\varphi+\int_B g(\varphi)d\varphi&=\int_{A\cup B}g(\varphi)d\varphi+\int_{A\cap B}g(\varphi)d\varphi\\&=\int_{E_{\alpha(\psi)}\cup E_{-\alpha(\psi)}}g(\varphi)d\varphi+\int_{E_{\alpha(\psi)}\cap E_{-\alpha(\psi)}}g(\varphi)d\varphi\\&=\int_{E_{\alpha(\psi)}}g(\varphi)d\varphi+\int_{E_{-\alpha(\psi)}}g(\varphi)d\varphi.\end{aligned} \tag{8.2.15}$$

同样有

$$\begin{aligned}&\int_{CA}g(\varphi)d\varphi+\int_{CB}g(\varphi)d\varphi\\&=\int_{F_{\alpha(\psi)}}g(\varphi)d\varphi+\int_{F_{-\alpha(\psi)}}g(\varphi)d\varphi.\end{aligned} \tag{8.2.16}$$

由(8.2.15)与(8.2.16)有

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2\pi}\left(\int_{E_{\alpha(\psi)}}+\int_{E_{-\alpha(\psi)}}\right)u_1(r(\psi)e^{i\varphi})d\varphi\\&\quad+\frac{1}{2\pi}\left(\int_{F_{\alpha(\psi)}}+\int_{F_{-\alpha(\psi)}}\right)u_2(r(\psi)e^{i\varphi})d\varphi\\&=\frac{1}{2\pi}\int_A u_1(r(\psi)e^{i\varphi})d\varphi+\frac{1}{2\pi}\int_{CA}u_2(r(\psi)e^{i\varphi})d\varphi\\&\quad+\frac{1}{2\pi}\int_B u_1(r(\psi)e^{i\varphi})d\varphi+\frac{1}{2\pi}\int_{CB}u_2(r(\psi)e^{i\varphi})d\varphi.\end{aligned} \tag{8.2.17}$$

根据(8.2.3)′,相应于 $r(\psi)$ 与 $2(\theta-\alpha(\psi))$ 有测度为 $2(\theta-\alpha(\psi))$

的集 E' 使

$$T^*(r(\phi)e^{i(\theta-\alpha(\phi))}, u) - C(u)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{E'} u_1(r(\phi)e^{i\varphi})\,d\varphi + \frac{1}{2\pi}\int_{CE'} u_2(r(\phi)e^{i\varphi})d\varphi \qquad (8.2.18)$$

并且

$$\frac{1}{2\pi}\int_{E'} u(r(\phi)e^{i\varphi})d\varphi = \max_{E}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{E} u(r(\phi)e^{i\varphi})d\varphi\right\}, \qquad (8.2.19)$$

上式右端的最大值是对 $[0, 2\pi)$ 上测度为 $2(\theta-\alpha(\phi))$ 的所有的集 E 取的.

于是由(8.2.12),(8.2.19)与(8.2.18)有

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi}\int_{A} u_1(r(\phi)e^{i\varphi})d\varphi + \frac{1}{2\pi}\int_{CA} u_2(r(\phi)e^{i\varphi})d\varphi \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{A} u(r(\phi)e^{i\varphi})\,d\varphi + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi} u_2(r(\phi)e^{i\varphi})d\varphi \\
&\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{E'} u(r(\phi)e^{i\varphi})\,d\varphi + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi} u_2(r(\phi)e^{i\varphi})d\varphi \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{E'} u_1(r(\phi)e^{i\varphi})d\varphi + \frac{1}{2\pi}\int_{CE'} u_2(r(\phi)e^{i\varphi})d\varphi \\
&= T^*(r(\phi)e^{i(\theta-\alpha(\phi))}, u) - C(u).
\end{aligned} \qquad (8.2.20)$$

同理有

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi}\int_{B} u_1(r(\phi)e^{i\varphi})d\varphi + \frac{1}{2\pi}\int_{CB} u_2(r(\phi)e^{i\varphi})d\varphi \\
&\leqslant T^*(r(\phi)e^{i(\theta+\alpha(\phi))}, u) - C(u).
\end{aligned} \qquad (8.2.21)$$

将(8.2.20)与(8.2.21)代入(8.2.17)得

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi}\left(\int_{E_{\alpha(\phi)}} + \int_{E_{-\alpha(\phi)}}\right)u_1(r(\phi)e^{i\varphi})d\varphi \\
&\qquad + \frac{1}{2\pi}\left(\int_{F_{\alpha(\phi)}} + \int_{F_{-\alpha(\phi)}}\right)u_2(r(\phi)e^{i\varphi})d\varphi \\
&\leqslant T^*(r(\phi)e^{i(\theta-\alpha(\phi))}, u) - C(u) \\
&\qquad + T^*(r(\phi)e^{i(\theta+\alpha(\phi))}, u) - C(u).
\end{aligned}$$

再结合(8.2.11)得

$$T^*(re^{i\theta}, u) \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} T^*(re^{i\theta}+\rho e^{i\phi}, u)d\phi.$$

§8.3. 展 布 关 系

8.3.1. 定义

现在我们回到本章开始时曾提到的精确地刻划亏量的问题。为此先要叙述 A.Edrei[3] 于 1965 年引进的一个重要概念：亚纯函数关于一个复数的展布.

定义 8.3. 设 $f(z)$ 于开平面亚纯，下级 μ 有穷，(r_j) 是 $f(z)$ 的一列 μ 级 Pólya 峰. 又设 $\Lambda(r)$ 为一正值函数适合

$$\Lambda(r) = o(T(r, f)) \qquad (r \to \infty). \tag{8.3.1}$$

对于每个 r，在 $(-\pi, \pi]$ 上确定辐角值的集合 $E_\Lambda(r, a)$ 使得

$$E_\Lambda(r, a) = \begin{cases} (\theta: |f(re^{i\theta}) - a| < e^{-\Lambda(r)}) & a \neq \infty, \\ (\theta: |f(re^{i\theta})| > e^{\Lambda(r)}) & a = \infty. \end{cases} \tag{8.3.2}$$

再置

$$\sigma_\Lambda(a) = \varliminf_{j\to\infty} \operatorname{mes} E_\Lambda(r_j, a) \tag{8.3.3}$$

以及

$$\sigma(a) = \operatorname*{Inf}_{\Lambda} \sigma_\Lambda(a). \tag{8.3.4}$$

这里的下确界是对满足条件(8.3.1)的所有的函数 $\Lambda(r)$取的. $\sigma(a)$ 称为函数 $f(z)$ 关于值 a 的展布.

为了以下证明展布关系的需要，我们来计算一个积分.

若$0 < \tau < 1$, $P(t, r, \theta) = \dfrac{1}{\pi}\cdot\dfrac{r\sin\theta}{t^2 + 2tr\cos\theta + r^2}$，则

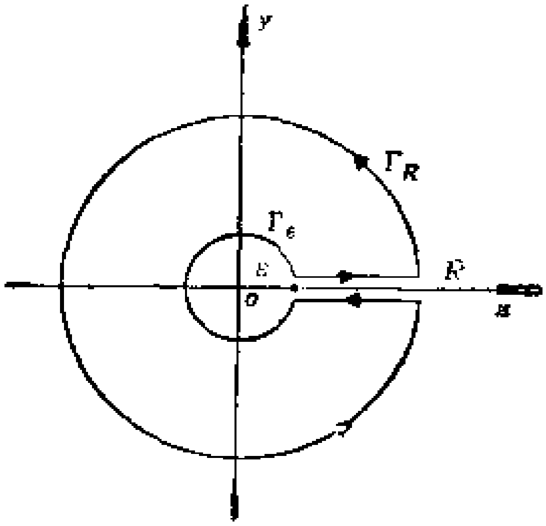
$$\int_0^\infty t^\tau P(t, 1, \theta)\, dt = \frac{\sin\tau\theta}{\sin\tau\pi}. \tag{8.3.5}$$

事实上取被积函数为

$$\frac{1}{\pi}\cdot\frac{z^\tau\sin\theta}{z^2 + 2z\cos\theta + 1},$$

取闭围线 Γ 如下图所示。 $z^2+2z\cos\theta+1=0$ 有二根 $z_1=-e^{i\theta}, z_2=-e^{-i\theta}$ 由残数定理有

$$\frac{1}{\pi}\int_{\Gamma}\frac{z^{\tau}\sin\theta}{z^2+2z\cos\theta+1}dz=2i\sum_{k=1}^{2}\left(\operatorname*{Res}_{z=z_k}\frac{z^{\tau}\sin\theta}{z^2+2z\cos\theta+1}\right).$$



容易看出，当 $\varepsilon\to 0$ 时，在 Γ_ε 上的积分趋向于 0；当 $R\to\infty$时，在 Γ_R 上的积分也趋向于 0。因此

$$\frac{1}{\pi}\left\{\int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{t^{\tau}\sin\theta}{t^2+2t\cos\theta+1}dt+\int_{\infty}^{0}\frac{(te^{2\pi i})^{\tau}\sin\theta}{t^2+2t\cos\theta+1}dt\right\}$$

$$=2i\frac{\{-(-e^{i\theta})^{\tau}+(-e^{-i\theta})^{\tau}\}}{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}\sin\theta.$$

从而便有(8.3.5)

8.3.2. 展布关系

1965 年 A. Edrei[3] 曾猜测下述定理应该成立。 1973 年 A. Baernstein[1] 给出了完全的证明。

定理 8.4. 设 $f(z)$ 于开平面亚纯，下级 μ 为有穷正数[1)]. 若复数 a 是 $f(z)$ 的一个亏值，亏量为 $\delta(a,f)$，则由定义 8.3 确定的 $\sigma(a)$有

---

1) 当 $\mu=0$ 时，可以证明 $\sigma(a)=2\pi$（例如参阅 Hayman[2]119 页），定理 8.4 也成立。

$$\sigma(a) \geqslant \min\left\{2\pi, \frac{4}{\mu}\arcsin\sqrt{\frac{\delta(a,f)}{2}}\right\}. \tag{8.3.6}$$

通常称(8.3.6)为展布关系.

证. 先考虑

$$0 < \frac{4}{\mu}\arcsin\sqrt{\frac{\delta(a,f)}{2}} < 2\pi \tag{8.3.7}$$

的情况.

不失普遍性,可以假设

$$f(0) = 1, \qquad a = \infty. \tag{8.3.8}$$

当(8.3.8)不成立时,若 $a \neq \infty$, 则命

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - a}.$$

若 $f(0) \neq 1$, 则适当选取整数 k 与常数 c 使

$$f(z) = cz^k h(z), \qquad h(0) = 1.$$

由(8.3.7)有 $\mu > 0$, 于是

$$T(r,f) \sim T(r,g) \sim T(r,h), \qquad r \to \infty.$$

从而 $f(z)$, $g(z)$, $h(z)$ 具有相同的下级 μ 和相同的 Pólya 峰. 这时有

$$E_A(r, a; f) = E_A(r, \infty; g)$$

以及

$$E_A(r, \infty; f) = E_{A_1}(r, \infty; h),$$

其中 $A_1(r) = A(r) - k\log r - \log|c|$. 而当 $r \to \infty$ 时,

$$A(r) = o(T(r,f)) \Longleftrightarrow A(r) = o(T(r,g))$$
$$\Longleftrightarrow A_1(r) = o(T(r,h)).$$

于是

$$\sigma(a,f) = \sigma(\infty, g), \quad \sigma(\infty, f) = \sigma(\infty, h).$$

同时不难看出 $\delta(a,f) = \delta(\infty, g)$, $\delta(\infty, f) = \delta(\infty, h)$.

这就表明无妨假定(8.3.8)成立.

记

$$\gamma = \frac{2}{\pi\mu}\arcsin\sqrt{\frac{\delta(\infty,f)}{2}},$$

则 $0<\gamma<1$. 设 $A(r)$ 是适合(8.3.1)的一个正值函数，置

$$\sigma_j=\operatorname{mes}E_A(r_j,\infty),$$

我们将证明

$$\varliminf_{j\to\infty}\sigma_j\geqslant 2\pi\gamma. \tag{8.3.9}$$

若记

$$E_0(r)=\{\theta:|f(re^{i\theta})|\geqslant 1\},$$
$$E^c(r)=\{\theta:1\leqslant|f(re^{i\theta})|\leqslant e^{A(r)}\},$$

则

$$\begin{aligned}T(r_j,f)&=\frac{1}{2\pi}\int_{E_0(r_j)}\log|f(r_je^{i\theta})|d\theta+N(r_j,f)\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{E_A(r_j,\infty)}\log|f(r_je^{i\theta})|d\theta+N(r_j,f)\\&\quad+\frac{1}{2\pi}\int_{E^c(r_j)}\log|f(r_je^{i\theta})|d\theta\\&\leqslant T^*(r_je^{\frac{1}{2}i\sigma_j})+A(r_j).\end{aligned}$$

结合 $T^*(z)\leqslant T(|z|,f)$ 便有

$$\lim_{j\to\infty}\frac{T^*(r_je^{\frac{1}{2}i\sigma_j})}{T(r_j,f)}=1. \tag{8.3.10}$$

再置

$$v(z)=\begin{cases}0 & z=0,\\ T^*(z^\gamma) & z\neq 0, Im z\geqslant 0.\end{cases} \tag{8.3.11}$$

于是 $v(z)$ 在 $Im z>0$ 下调和，且连续到边界上. 考虑区域

$$D_R=\{z=re^{i\theta}:0<r<R,0<\theta<\pi\}.$$

用 $v(z)$ 在 D_R 的边界上的值作调和函数 $h(z)$,

$$\begin{aligned}h(z)&=\int_{-R}^{R}v(t)A(t,r,\theta,R)dt\\&\quad+\int_0^\pi v(Re^{i\varphi})B(\varphi,r,\theta,R)d\varphi,\end{aligned}$$

其中[1]

---

1) 关于半圆内调和函数的公式可参阅 Гольдберг 与 Островский[1,16页]

$$A(t, r, \theta, R) = \frac{1}{\pi} \frac{r\sin\theta}{t^2 - 2tr\cos\theta + r^2}$$

$$- \frac{1}{\pi} \frac{R^2 r\sin\theta}{R^4 - 2rtR^2\cos\theta + r^2t^2},$$

$$B(\varphi, r, \theta, R) = \frac{2Rr\sin\theta}{\pi} \frac{(R^2 - r^2)\sin\varphi}{|R^2e^{2i\varphi} - 2rRe^{i\varphi}\cos\theta + r^2|^2}.$$

显然在 D_R 内部应有 $v(z) \leqslant h(z)$.

在 $t > 0$ 时,由(8.3.11)与 T^* 函数的定义有

$$v(t) = T^*(t^\gamma) = N(t^\gamma, f),$$

$$v(-t) = v(te^{i\pi}) = T^*(t^\gamma e^{i\gamma\pi}) \leqslant T(t^\gamma, f),$$

以及当 $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$ 时有

$$v(Re^{i\varphi}) = T^*(R^\gamma e^{i\gamma\pi}) \leqslant T(R^\gamma).$$

注意 Poisson 核 A 和 B 都是正的,于是当 $re^{i\theta} \in D_R$ 时有

$$v(re^{i\theta}) \leqslant \int_0^R N(t^\gamma, f)A(t, r, \theta, R)dt$$

$$+ \int_0^R T(t^\gamma, f)A(-t, r, \theta, R)dt$$

$$+ T(R^\gamma, f)\int_0^\pi B(\varphi, r, \theta, R)d\varphi. \qquad (8.3.12)$$

从

$$|R^2e^{2i\varphi} - 2rRe^{i\varphi}\cos\theta + r^2|^2 = |(Re^{i\varphi} - re^{i\theta})(Re^{i\varphi} - re^{-i\theta})|^2$$

$$\geqslant (R - r)^4 > \frac{R^4}{16} \qquad \left(0 < r < \frac{R}{2}\right).$$

可知

$$B(\varphi, r, \theta, R) < \frac{32r}{\pi R}$$

$$\left(0<\theta < \pi, 0 < \varphi < \pi, \ 0 < r < \frac{R}{2}\right).$$

由于

$$R^4 - 2rtR^2\cos\theta + r^2t^2 = |R^2 - rte^{i\theta}|^2 > 0,$$

A 中的第二项是正的. 若记

$$P(t, r, \theta) = \frac{1}{\pi} \frac{r \sin\theta}{t^2 + 2tr\cos\theta + r^2},$$

则

$$A(t, r, \theta, R) \leqslant P(t, r, \pi-\theta),$$
$$A(-t, r, \theta, R) \leqslant P(t, r, \theta).$$

将A和B的估计式代入(8.3.12)式就得到

$$v(re^{i\theta}) \leqslant \int_0^R N(t^\gamma, f) P(t, r, \pi-\theta) dt$$
$$+ \int_0^R T(t^\gamma, f) P(t, r, \theta) dt + 32\left(\frac{r}{R}\right) T(R^\gamma, f)$$
$$\left(0 < \theta < \pi,\ 0 < r < \frac{R}{2}\right). \tag{8.3.13}$$

对于 Pólya 峰(r_j)，设(r_j')与(r_j'')为两个与其相关的序列．置

$$s_j' = (r_j')^{\frac{1}{\gamma}},\ s_j = (r_j)^{\frac{1}{\gamma}},\ s_j'' = (r_j'')^{\frac{1}{\gamma}},$$

则

$$T(t^\gamma, f) \leqslant (1 + o(1)) T(r_j, f) \left(\frac{t}{s_j}\right)^{\gamma\mu}$$
$$(s_j' < t < s_j''). \tag{8.3.14}$$

选取 j_0 使当 $j \geqslant j_0$ 时有 $2s_j' < s_j < \frac{s_j''}{2}$. 于是

$$P(t, s_j, \theta) = \frac{1}{\pi} Im\left(\frac{1}{t + s_j e^{-i\theta}}\right)$$
$$\leqslant \frac{1}{\pi|t + s_j e^{-i\theta}|} < \frac{1}{\pi \frac{s_j}{2}} < \frac{1}{s_j}$$
$$(0 < t < s_j',\ j \geqslant j_0).$$

由上式和(8.3.14)，当 $0 < \theta < \pi$ 与 $j \geqslant j_0$ 时即有

$$\int_0^{s_j''} T(t^\gamma, f) P(t, s_j, \theta) dt$$
$$= \left(\int_0^{s_j'} + \int_{s_j'}^{s_j''}\right) T(t^\gamma, f) P(t, s_j, \theta) dt$$

$$\leqslant T(r'_j, f)\frac{s'_j}{s_j} + (1 + o(1))T(r_j, f)$$

$$\times \int_{s'_j}^{s''_j}\left(\frac{t}{s_j}\right)^{\gamma\mu}P(t, s_j, \theta)dt$$

$$\leqslant T(r_j, f)\frac{s'_j}{s_j} + (1 + o(1))T(r_j, f)$$

$$\times \int_0^{\infty}\left(\frac{t}{s_j}\right)^{\gamma\mu}P(t, s_j, \theta)dt.$$

但是

$$\lim_{j\to\infty}\frac{s'_j}{s_j} = \lim_{j\to\infty}\left(\frac{r'_j}{r_j}\right)^{\frac{1}{\gamma}} = 0,$$

以及由 $\gamma\mu = \frac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{\frac{\delta(\infty, f)}{2}} \leqslant \frac{1}{2}$ 与(8.3.5)有

$$\int_0^{\infty}\left(\frac{t}{s_j}\right)^{\gamma\mu}P(t, s_j, \theta)dt = \int_0^{\infty}t^{\gamma\mu}P(t, 1, \theta)dt$$

$$= \frac{\sin\theta\gamma\mu}{\sin\pi\gamma\mu},$$

因此对于 $0 < \theta < \pi$ 一致地有

$$\int_0^{s''_j}T(t^\gamma, f)P(t, s_j, \theta)dt$$

$$\leqslant T(r_j, f)\left\{\frac{\sin\theta\gamma\mu}{\sin\pi\gamma\mu} + o(1)\right\} \qquad (j\to\infty). \tag{8.3.15}$$

由定义

$$N(t^\gamma, f) < (1 - \delta(\infty, f) + o(1))T(t^\gamma, f) \quad (s'_j < t < s''_j),$$

类似于以上推导对于 $0 < \theta < \pi$ 一致地有

$$\int_0^{s''_j}N(t^\gamma, f)P(t, s_j, \pi - \theta)dt$$

$$< (1 - \delta(\infty, f))T(r_j, f)\left\{\frac{\sin(\pi - \theta)\gamma\mu}{\sin\pi\gamma\mu} + o(1)\right\}$$

$$(j\to\infty). \tag{8.3.16}$$

再注意当 $j\to\infty$ 时

$$\frac{s_j}{s_j''}T((s_j'')^\gamma, f) = \left(\frac{r_j}{r_j''}\right)^{\frac{1}{\gamma}}T(r_j'', f)$$

$$< (1 + o(1))T(r_j, f)\left(\frac{r_j}{r_j''}\right)^{\frac{1}{\gamma}-\mu} = o(T(r_j, f)). \qquad (8.3.17)$$

在(8.3.13)中取 $r = s_j$, $R = s_j''$, 应用 (8.3.15), (8.3.16) 与 (8.3.17),则当 $j \to \infty$ 时对于 $0 < \theta < \pi$ 一致地有

$$v(s_j e^{i\theta}) \leqslant T(r_j, f)$$

$$\times \left\{\frac{\sin\theta\gamma\mu + (1 - \delta(\infty, f))\sin(\pi - \theta)\gamma\mu}{\sin\pi\gamma\mu} + o(1)\right\}.$$

但是由 γ 的定义

$$1 - \delta(\infty, f) = \cos\pi\gamma\mu,$$

再结合

$$\begin{aligned}\sin\theta\gamma\mu &= \sin\{\pi\gamma\mu - (\pi - \theta)\gamma\mu\}\\ &= \sin\pi\gamma\mu\cos(\pi - \theta)\gamma\mu - \cos\pi\gamma\mu\sin(\pi - \theta)\gamma\mu,\end{aligned}$$

即知

$$v(s_j e^{i\theta}) \leqslant T(r_j, f)\{\cos(\pi - \theta)\gamma\mu + o(1)\}$$
$$(j \to \infty,\ 0 < \theta < \pi). \qquad (8.3.18)$$

对于 $\sigma_j = \operatorname{mes} E_A(r_j, \infty)$ 置

$$J = \{j : \sigma_j \leqslant 2\pi\gamma\}.$$

当 J 只含有限个 j 时, (8.3.9) 显然成立. 以下假定 J 为无限集.

点

$$(r_j e^{\frac{1}{2}i\sigma_j})^{\frac{1}{\gamma}} = s_j e^{\frac{1}{2}i\frac{\sigma_j}{\gamma}}$$

属于上半平面的充要条件为 $j \in J$. 当 $j \in J$ 时,

$$T^*(r_j e^{\frac{1}{2}i\sigma_j}) = v(s_j e^{i\frac{\sigma_j}{2\gamma}}).$$

将它代入(8.3.10)有

$$\lim_{\substack{j\to\infty\\ j\in J}}\frac{v(s_j e^{i\frac{\sigma_j}{2\gamma}})}{T(r_j, f)} = 1.$$

可是根据(8.3.18)又有

$$v(s_j e^{i\frac{\sigma_j}{2\gamma}}) \leqslant T(r_j, f)\left\{\cos\left(\pi - \frac{\sigma_j}{2\gamma}\right)\gamma\mu + o(1)\right\}$$
$$(j \in J, j \to \infty).$$

于是

$$\lim_{\substack{j\to\infty \\ j\in J}} \frac{\sigma_j}{2\gamma} = \pi.$$

从而当 $0 < \frac{4}{\mu}\arcsin\sqrt{\frac{\delta(a,f)}{2}} < 2\pi$ 时定理得证.

当 $\frac{4}{\mu}\arcsin\sqrt{\frac{\delta(a,f)}{2}} \geqslant 2\pi$，则取数 d 使得

$$0 < d < \delta(a, f)$$

以及

$$\frac{4}{\mu}\arcsin\sqrt{\frac{d}{2}} < 2\pi.$$

置 $\gamma = \frac{2}{\pi\mu}\arcsin\sqrt{\frac{d}{2}}$，如同以上推理可证

$$\sigma(a) \geqslant \frac{4}{\mu}\arcsin\sqrt{\frac{d}{2}}.$$

命 d 递增趋向于 $d_0 = 2\sin^2\frac{\mu\pi}{2}$ 即知 $\sigma(a) = 2\pi$.

系. 设 $f(z)$ 于开平面亚纯，下级 μ 有穷. 又设 $f(z)$ 以 a_j $(j = 1, 2, \cdots, \nu(f); 1 \leqslant \nu(f) \leqslant \infty)$ 为亏值，且

$$\delta(a_1, f) \geqslant \delta(a_2, f) \geqslant \delta(a_3, f) \geqslant \cdots,$$ 若

$$\frac{4}{\mu}\arcsin\sqrt{\frac{\delta(a_1, f)}{2}} < 2\pi, \tag{8.3.19}$$

则

$$\frac{4}{\mu}\sum_{j=1}^{\nu(f)}\arcsin\sqrt{\frac{\delta(a_j, f)}{2}} \leqslant 2\pi. \tag{8.3.20}$$

证. 当 $\nu(f) < \infty$ 时，命

$$d = \min_{\substack{1 \leqslant j_1 \neq j_2 \leqslant \nu(f) \\ a_{j_1}, a_{j_2} \neq \infty}} \{|a_{j_1} - a_{j_2}|\},$$

$$A = \max_{\substack{1 \leqslant j \leqslant \nu(f) \\ a_j \neq \infty}} \{|a_j|\},$$

$$A(r) = \max\left\{1 + \log\frac{2}{d},\ \log(A+2)\right\}.$$

在条件(8.3.19)下有 $\mu > 0$，于是

$$A(r) = o\{T(r, f)\} \quad (r \to \infty).$$

我们断言当 $1 \leqslant j_1 \neq j_2 \leqslant \nu(f)$时有

$$E_A(r, a_{j_1}) \cap E_A(r, a_{j_2}) = \phi, \tag{8.3.21}$$

其中 $E_A(r, a)$ 由(8.3.2)定义. 事实上，如果

$$\theta \in E_A(r, a_{j_1}) \cap E_A(r, a_{j_2}),$$

当 $a_{j_1}, a_{j_2} \neq \infty$ 时，

$$d \leqslant |a_{j_1} - a_{j_2}| \leqslant |a_{j_1} - f(re^{i\theta})| + |f(re^{i\theta}) - a_{j_2}|$$
$$< 2e^{-A(r)} \leqslant 2e^{-\left(1+\log\frac{2}{d}\right)} < \frac{d}{e}.$$

当 $a_{j_1} = \infty$ 时，则

$$A + 2 \leqslant e^{A(r)} < |f(re^{i\theta})| < |a| + 1 \leqslant A + 1.$$

都推出了矛盾.

由(8.3.21)，(8.3.3)与(8.3.4)可知

$$\sum_{j=1}^{\nu(f)} \sigma(a_j) \leqslant 2\pi.$$

应用定理 8.4 便得(8.3.20).

当 $\nu(f) = \infty$ 时，在 $a_j(j = 1, 2, \cdots)$中任取 J 个都有

$$\frac{4}{\mu} \sum_{j=1}^{J} \arcsin\sqrt{\frac{\delta(a_j, f)}{2}} \leqslant 2\pi.$$

于是也有(8.3.20).

(8.3.20)称为总展布关系.

§8.4. 展布关系的应用

8.4.1. Fuchs 定理

从展布关系可以立即得到的一个重要结论是

定理 8.5. 设函数 $f(z)$于开平面亚纯，下级 μ 有穷. 若 $f(z)$的亏值为 $a_j(j=1, 2, \cdots)$，相应的亏量为 $\delta(a_j, f)$，则级数

$$\sum_{j=1}^{\infty}\{\delta(a_j, f)\}^{\frac{1}{2}}$$

收敛，且其和数不超过 $\max\left\{1, \frac{\sqrt{2}}{2}\mu\pi\right\}$.

证. 将亏值按照亏量由大至小的顺序排列. 如果

$$\frac{4}{\mu}\arcsin\sqrt{\frac{\delta(a_1, f)}{2}} \geqslant 2\pi,$$

则不难看出 a_1 是 $f(z)$ 唯一的亏值，这时定理结论显然成立. 如果

$$\frac{4}{\mu}\arcsin\sqrt{\frac{\delta(a_1, f)}{2}} < 2\pi,$$

则应用定理 8.4 的系有

$$\frac{4}{\mu}\sum_{j=1}^{\infty}\arcsin\sqrt{\frac{\delta(a_j, f)}{2}} \leqslant 2\pi. \tag{8.4.1}$$

我们立即得

$$\sum_{j=1}^{\infty}\{\delta(a_j, f)\}^{\frac{1}{2}} \leqslant \sqrt{2}\sum_{j=1}^{\infty}\arcsin\sqrt{\frac{\delta(a_j, f)}{2}} \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}\mu\pi.$$

对于开平面亚纯的有穷级函数 $f(z)$，

$$\sum_{j=1}^{\infty}\{\delta(a_j, f)\}^{\frac{1}{2}}$$

收敛，最初是 O. Teichmuller[1] 指出的，但到 1958 年才由 W.Fuchs[1] 给出严格的证明. 1964 年 W.K.Hayman[2] 进一步证明了

定理 8.5' 设 $f(z)$ 于开平面亚纯，下级 μ 有穷. 若其亏值为

$a_j(j=1,2,\cdots)$，相应的亏量为 $\delta(a_j,f)$，则对于任给的正数 ε 都有 $\sum_{j=1}^{\infty}\{\delta(a_j,f)\}^{\frac{1}{3}+\varepsilon}$ 收敛．并且对于预先任给的正数 ε，存在开平面上的亚纯函数 $f(z)$，下级 μ 有穷，使得

$$\sum_{j=1}^{\infty}\{\delta(a_j,f)\}^{\frac{1}{3}-\varepsilon}$$

发散．

于是一个明显的问题是 $\sum_{j=1}^{\infty}\{\delta(a_j,f)\}^{\frac{1}{3}}$ 是收敛还是发散呢？

1966 年 В. П. Петренко[1]证明了

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\{\delta(a_j,f)\}^{\frac{1}{3}}}{\log\dfrac{e}{\delta(a_j,f)}}<\infty.$$

然后 E.Bombieri 和 P.Ragendda[1] 证明了：若 $\tau(t)$ 是在 $(0,\infty)$ 内定义的正值函数，且 $\int^{\infty}\frac{\tau(t)}{t}dt<\infty$，则

$$\sum_{j=1}^{\infty}\{\delta(a_j,f)\tau(\delta(a_j,f))\}^{\frac{1}{3}}<\infty.$$

1972 年 A.Weitsman[2] 最终证明了

定理 8.5″ 设 $f(z)$ 于开平面亚纯，下级 μ 有穷，则

$$\sum_{j=1}^{\infty}\{\delta(a_j,f)\}^{\frac{1}{3}}<\infty.$$

如果用 $f^{(k)}(z)$ 表示 $f(z)$ 的导数 $(k>0)$ 或原函数 $(k<0)$，杨乐和张广厚[9]还对下级为有穷的整函数 $f(z)$ 证明了

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{a_{kj}\neq 0,\infty}\delta(a_{kj},f^{(k)})^{\frac{1}{3}}<\infty.$$

对上面这些结果有兴趣的读者，请直接阅读原文。

8.4.2. 椭圆定理

为了从展布关系导出著名的椭圆定理，我们首先注意一个有趣的初等事实.

引理 8.5. 设 μ 为适合 $0 \leqslant \mu \leqslant 1$ 的数，A, B 为两个正数. 若 $A + B \leqslant \pi$，则

$$\cos^2\mu A + \cos^2\mu B - 2\cos\mu A\cos\mu B\cos\mu\pi \geqslant \sin^2\mu\pi. \tag{8.4.2}$$

证. (1) 我们首先证明，当 $A + B = \pi$ 时，(8.4.2)成立. 这时(8.4.2)的左端

$$\begin{aligned}
&= \cos^2\mu A + \cos^2(\mu\pi - \mu A)\\
&\quad - 2\cos\mu A\cos\mu\pi\cos(\mu\pi - \mu A)\\
&= \cos^2\mu A + \sin^2\mu A\sin^2\mu\pi - \cos^2\mu A\cos^2\mu\pi\\
&= \cos^2\mu A\sin^2\mu\pi + \sin^2\mu A\sin^2\mu\pi\\
&= \sin^2\mu\pi
\end{aligned}$$

(2) 当 $A + B < \pi$ 时，无妨设 $A \geqslant B$. 我们将证

$$\begin{aligned}
&\cos^2\mu A + \cos^2\mu B - 2\cos\mu A\cos\mu B\cos\mu\pi\\
&> \cos^2\mu A + \cos^2\mu(\pi - A)\\
&\quad - 2\cos\mu A\cos\mu(\pi - A)\cos\mu\pi.
\end{aligned} \tag{8.4.3}$$

然而根据情况(1)的论证，上式右端 $= \sin^2\mu\pi$.

为了证明(8.4.3)式，我们注意当 x 在 $[0, \pi]$ 上变化时，$\cos x$ 是递减函数. 于是由

$$0 < \mu B < \mu(\pi - A) < \pi$$

有

$$\cos\mu B - \cos\mu(\pi - A) > 0. \tag{8.4.4}$$

再注意如果 $\mu(\pi + A) \leqslant \frac{\pi}{2}$，则由 $0 < \mu B < \mu(\pi + A)$ 有

$$\cos\mu B - \cos\mu(\pi + A) > 0. \tag{8.4.5}$$

若 $\frac{\pi}{2} \leqslant \mu(\pi + A) \leqslant \frac{3\pi}{2}$，则 $\cos\mu(\pi + A) < 0$. 而由 $\mu B \leqslant B$

$<\frac{\pi}{2}$，有 $\cos\mu B \geqslant 0$，于是(8.4.5)也成立. 若 $\mu(\pi+A)>\frac{3}{2}\pi$，则

$$\mu(\pi+A)<\mu\pi+\mu(\pi-B)\leqslant 2\pi-\mu B,$$

从而(8.4.5)也能成立.

因此由(8.4.4),(8.4.5)

$$\{\cos\mu B-\cos\mu(\pi-A)\}\{\cos\mu B-\cos\mu(\pi+A)\}>0.$$

即

$$\begin{aligned}&\{\cos\mu B-\cos\mu(\pi-A)\}\\&\times\{(\cos\mu B+\cos\mu(\pi-A))-(\cos\mu(\pi+A)\\&+\cos\mu(\pi-A))\}>0.\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}&\{\cos\mu B-\cos\mu(\pi-A)\}\{\cos\mu B+\cos\mu(\pi-A)\}\\&>\{\cos\mu(\pi+A)+\cos\mu(\pi-A)\}\{\cos\mu B-\cos\mu(\pi-A)\}.\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}&\cos^2\mu B-\cos^2\mu(\pi-A)\\&>2\cos\mu\pi\cos\mu A\{\cos\mu B-\cos\mu(\pi-A)\}.\end{aligned}$$

这就是(8.4.3).

定理 8.6. 设函数 $f(z)$ 于开平面亚纯，下级为 μ，适合 $0\leqslant\mu\leqslant 1$. 若 $f(z)$ 以两个判别的复数 a, b 为亏值，记

$$u=1-\delta(a,f),\qquad v=1-\delta(b,f),$$

则

$$u^2+v^2-2uv\cos\mu\pi\geqslant\sin^2\mu\pi. \tag{8.4.6}$$

并且当 $u\leqslant\cos\mu\pi$ 时有 $v=1$；当 $v\leqslant\cos\mu\pi$ 时有 $u=1$.

证. 当 $\mu=0$ 时，(8.4.6)式显然成立，所以无妨设 $\mu>0$. 这时，根据展布关系应有

$$\frac{4}{\mu}\arcsin\sqrt{\frac{\delta(a,f)}{2}}+\frac{4}{\mu}\arcsin\sqrt{\frac{\delta(b,f)}{2}}\leqslant 2\pi.$$

若命

$$A=\frac{2}{\mu}\arcsin\sqrt{\frac{\delta(a,f)}{2}},\quad B=\frac{2}{\mu}\arcsin\sqrt{\frac{\delta(b,f)}{2}},$$

则

$$A > 0, \quad B > 0, \quad A + B \leqslant \pi.$$

并且

$$\cos \mu A = 1 - 2\sin^2 \frac{\mu A}{2} = 1 - \delta(a, f) = u,$$

$$\cos \mu B = 1 - 2\sin^2 \frac{\mu B}{2} = 1 - \delta(b, f) = v.$$

于是(8.4.6)可由引理 8.5 立即得到.

当 $u \leqslant \cos \mu\pi$ 时，$\delta(a, f) \geqslant 1 - \cos \mu\pi$. 这时

$$\frac{4}{\mu} \arcsin \sqrt{\frac{\delta(a, f)}{2}} \geqslant 2\pi.$$

因此 $\frac{4}{\mu} \arcsin \sqrt{\frac{\delta(b, f)}{2}} = 0$，即 $v = 1$. 同样当 $v \leqslant \cos \mu\pi$ 时 $u = 1$.

定理 8.6 表明了点 (u, v) 不能位于椭圆 $u^2 + v^2 - 2uv \cos \mu\pi = \sin^2 \mu\pi$ 内，所以它被称为椭圆定理. 定理 8.6 是属于 A.Edrei 与 W.Fuchs[3]的.

从椭圆定理，我们可以获得一系列重要的推论. 例如

系 1. 设函数 $f(z)$ 于开平面亚纯，下级 $\mu \leqslant \frac{1}{2}$. 若 $f(z)$ 以 a 为亏值且 $\delta(a, f) \geqslant 1 - \cos \mu\pi$，则 a 是 $f(z)$ 唯一的亏值. 特别地，下级为零的亚纯函数至多只能有一个亏值.

事实上，若 $f(z)$ 还有亏值 b，则由于

$$u = 1 - \delta(a, f) \leqslant \cos \mu\pi,$$

应用定理 8.6 有 $v = 1$，即 $\delta(b, f) = 0$.

系 2. 设 $f(z)$为有穷级的超越整函数，下级 μ 适合

$$0 \leqslant \mu \leqslant 1,$$

则

$$\sum_{a\neq\infty}\delta(a,f)\begin{cases}=0 & 0\leqslant\mu\leqslant\frac{1}{2},\\ \leqslant 1-\sin\mu\pi & \frac{1}{2}<\mu\leqslant 1,\end{cases}\tag{8.4.7}$$

对于任意 $q(<\infty)$ 个判别的有穷复数，应用 Nevanlinna 第二基本定理有

$$\sum_{j=1}^{q} m\left(r,\frac{1}{f-a_j}\right)<T(r,f)-N\left(r,\frac{1}{f'}\right)+O(\log r).$$

于是

$$\sum_{j=1}^{q}\varliminf_{r\to\infty}\frac{m\left(r,\frac{1}{f-a_j}\right)}{T(r,f)}\leqslant\varliminf_{r\to\infty}\frac{\sum_{j=1}^{q}m\left(r,\frac{1}{f-a_j}\right)}{T(r,f)}$$

$$\leqslant\varliminf_{r\to\infty}\left(1-\frac{N\left(r,\frac{1}{f'}\right)}{T(r,f)}\right)+\varlimsup_{r\to\infty}\frac{O(\log r)}{T(r,f)}.$$

由于这时有

$$T(r,f')<(1+o(1))T(r,f),\quad \varlimsup_{r\to\infty}\frac{\log r}{T(r,f)}=0,$$

因此

$$\sum_{j=1}^{q}\delta(a_j,f)\leqslant\delta(0,f').$$

从而

$$\sum_{a\neq\infty}\delta(a,f)\leqslant\delta(0,f').\tag{8.4.8}$$

$f(z)$ 是下级等于 μ 的整函数. 当 $0\leqslant\mu\leqslant\frac{1}{2}$ 时，$\delta(\infty,f')=1\geqslant 1-\cos\mu\pi$，根据系 1 应有 $\delta(0,f')=0$. 从而

$$\sum_{a\neq\infty}\delta(a,f)=0.$$

当 $\frac{1}{2}<\mu\leqslant 1$ 时，置 $u=1-\delta(\infty,f')=0$，$v=1-\delta(0,f')$，

则由(8.4.6)应有 $v^2 \geqslant \sin^2\mu\pi$. 注意 $0 \leqslant v \leqslant 1$, 于是 $v \geqslant \sin\mu\pi$, 从而 $\delta(0, f) \leqslant 1 - \sin\mu\pi$. 代回(8.4.8)也得系 2 结论.

(8.4.7)可以改写为

$$\sum\delta(a,f)\begin{cases} = 1, & 0 \leqslant \mu \leqslant \dfrac{1}{2}, \\ \leqslant 2 - \sin\mu\pi, & \dfrac{1}{2} < \mu \leqslant 1. \end{cases} \tag{8.4.9}$$

深刻的事实是对于下级 μ 适合 $0 \leqslant \mu \leqslant 1$ 的亚纯函数,有一个类似的结果. 这就是 1973 年 A.Edrei[4] 在 $\mu \leqslant 1$ 时解决亏量问题所建立的定理,我们将在下节予以论述.

§8.5. 亏 量 问 题

8.5.1. 亏量问题及其变形

亏量关系的另一个重要应用是可以解决下级小于 1 的亚纯函数的亏量问题 (参阅 Edrei[4]).

设 $f(z)$于开平面亚纯,下级 μ 有穷. 又设 $f(z)$以 $a_j(j = 1, 2, \cdots)$为亏值,并且将它们适当排列使得

$$\delta(a_1, f) \geqslant \delta(a_2, f) \geqslant \delta(a_3, f) \geqslant \cdots > 0. \tag{8.5.1}$$

亏值总数记为 $\nu(f)(0 \leqslant \nu(f) < \infty)$, 总亏量定义为

$$\Delta(f) = \sum_{j=1}^{\nu(f)} \delta(a_j, f).$$

定义 8.4. 亏量问题: 设 $\mathscr{F}_\mu$ 是下级等于 $\mu(< \infty)$ 的全体亚纯函数.

(1) 确定

$$\Omega(\mu) = \sup_{f \in \mathscr{F}_\mu} \Delta(f).$$

(2) $\mathscr{F}_\mu$ 中的函数 f 如果使

$$\Delta(f) = \Omega(\mu), \tag{8.5.2}$$

则称 f 为极值函数. 那么极值函数是否存在? 如果存在, 除了(8.5.2)外,还具有哪些性质?

当 $f(z)$ 以 $a_j(j=1,2,\cdots,\nu(f))$ 为亏值时，由展布关系

$$\sum_{j=1}^{\nu(f)} \frac{4}{\mu} \arcsin \sqrt{\frac{\delta(a_j, f)}{2}} \leqslant 2\pi. \tag{8.5.3}$$

这里根据(8.5.1)假定了 $\frac{4}{\mu} \arcsin \sqrt{\frac{\delta(a_1, f)}{2}} < 2\pi$. 在相反的情况，$\delta(a_1, f) \geqslant 2\sin^2 \frac{\mu\pi}{2} = 1 - \cos\mu\pi$，于是由定理8.6系1，$a_1$ 为 $f(z)$唯一的亏值，这种情况简单明瞭，没有什么更多讨论的.

(8.5.3)式为

$$\frac{4}{\pi} \sum_{j=1}^{\nu(f)} \arcsin \sqrt{\frac{\delta(a_j, f)}{2}} \leqslant 2\mu.$$

我们要在这个约束条件下寻求

$$\Delta(f) = \sum_{j=1}^{\nu(f)} \delta(a_j, f)$$

准确的上界.

为了使这个问题便于处理，记

$$s_j = \frac{4}{\pi} \arcsin \sqrt{\frac{\delta(a_j, f)}{2}} \qquad (j = 1, 2, \cdots, \nu(f)),$$

则 $\delta(a_j, f) = 2\sin^2 \frac{s_j\pi}{4}$. 于是上述问题转化为

若 $\sum_{j=1}^{\nu(f)} s_j \leqslant 2\mu$，希望求得

$$\sum_{j=1}^{\nu(f)} 2\sin^2 \frac{s_j\pi}{4}$$

准确的上界.

据此可以提出下一小节的规划问题.

8.5.2. 一个规划问题及其解答

设 $x = \varphi(s)$ 是 $0 \leqslant s \leqslant 1$ 上的二次连续可微函数，且

$\varphi(0)=0$, $\varphi(1)=1$，在$(0,1)$内恒有$\varphi'(s)>0$, $\varphi''(s)>0$. 记其反函数为 $s=\psi(x)=\varphi^{-1}(x)(0\leqslant x\leqslant 1)$.

问题 P：设

$$s_1, s_2, \cdots, s_k \quad (2\leqslant k<\infty)$$

适合约束条件

$$0\leqslant s_j\leqslant 1 \quad (j=1,2,\cdots,k),$$

$$\sum_{j=1}^{k} s_j\leqslant H \quad (H>0).$$

我们欲求

$$\Lambda=\sup\left(\sum_{j=1}^{k}\varphi(s_j)\right).$$

这里的上确界是对所有适合约束条件的点$(s_1,s_2,\cdots,s_k)$而言的. 如果这个上确界在某点$s=(s_1,s_2,\cdots,s_k)$上达到，这种点即称为最优点，那么最优点应该具备什么性质呢？

为了解决上述规划问题，我们注意下述事实.

引理 8.6. 在上述记号下，若 $s=(s_1,s_2,\cdots,s_k)$ 是一个最优点，则它至多只能有一个分量异于 0 和 1.

证. 倘若引理结论不成立，即存在一个最优点 s，它有两个或两个以上的分量异于 0 和 1. 例如 s_1, s_2 有

$$0<s_1<1, \qquad 0<s_2<1.$$

由约束条件有

$$s_1+s_2\leqslant H-\sum_{j=3}^{k} s_j.$$

由于 s 是最优点，于是

$$\varphi(s_1)+\varphi(s_2)=\Lambda-\sum_{j=3}^{k}\varphi(s_j). \qquad (8.5.4)$$

当$|t|$充分小时，显然点

$$s(t)=(s_1+t, s_2-t, s_3,\cdots,s_k)$$

仍然适合约束条件. 因此

$$\varphi(s_1+t)+\varphi(s_2-t)+\sum_{j=3}^{k}\varphi(s_j)\leqslant \Lambda. \qquad (8.5.5)$$

联合(8.5.4),(8.5.5)两式可知

$$G(t)=\varphi(s_1+t)+\varphi(s_2-t)$$

在 $t=0$ 具有一个极大值,从而 $G''(0)\leqslant 0$. 另一方面

$$G''(0)=\varphi''(s_1)+\varphi''(s_2)>0.$$

这样便得一矛盾. 从而引理得证.

引理 8.7. 对于上述规划问题 P, 最优点总是存在的. 并且

(1) 当 $k\leqslant H$ 时有 $\Lambda=k, s_1=s_2=\cdots=s_k=1$.

(2) 当 $H<k$ 时有 $\Lambda=[H]+\varphi(H-[H])$, 其中$[H]$表示不超过$H$的最大整数. 这时最优点 s 恰有$[H]$个分量为 1,一个分量为 $H-[H]$,其他分量为 0.

引理 8.7 由引理 8.6 并注意到 $\varphi(s)$是 $[0,1]$ 上的递增函数便可立即得到.

引理 8.8. 设$x_j(j=1,2,\cdots k;\ 2\leqslant k\leqslant\infty)$ 适合约束条件

$$0\leqslant x_j\leqslant 1 \quad (1\leqslant j\leqslant k), \quad \sum_{j=1}^{k}\psi(x_j)\leqslant H<\infty. \qquad (8.5.6)$$

(1) 若 $k\leqslant H$, 则$\sum_{j=1}^{k}x_j\leqslant k$.

(2) 若 $H<k<\infty$, 则

$$\sum_{j=1}^{k}x_j\leqslant [H]+\varphi(H-[H]).$$

等号当且仅当下述情况时取到: 恰有$[H]$个分量为 1,一个分量为 $\varphi(H-[H])$,其余分量为 0.

(3) 若 $k=\infty$ 且 $x_j>0 \quad (j=1,2,\cdots)$, 则

$$\sum_{j=1}^{\infty}x_j<[H]+\varphi(H-[H]).$$

证. 结论(1)和(2)可由引理 8.7 直接得到.

为了证明结论(3)，选取 $l \geqslant H+1$，同时使得

$$R_{l+1}=\sum_{j=l+1}^{\infty}\phi(x_j)<1. \tag{8.5.7}$$

由于 $\sum\limits_{j=1}^{\infty}\phi(x_j)\leqslant H<\infty$，所以这种选取总是可能的.

对于适合 $l+1\leqslant N<\infty$ 的正整数 N，由于

$$0\leqslant x_j\leqslant 1 \qquad (j=l+1, l+2, \cdots, N)$$

与(8.5.7)，应用本引理(2)的结论有

$$\sum_{j=l+1}^{N}x_j\leqslant\varphi(R_{l+1}).$$

从而

$$\sum_{j=l+1}^{\infty}x_j\leqslant\varphi(R_{l+1})<1.$$

注意 $s=\phi(x)$ 在 $[0,1]$ 上递增，于是

$$\phi\left(\sum_{j=l+1}^{\infty}x_j\right)\leqslant R_{l+1}=\sum_{j=l+1}^{\infty}\phi(x_j)<1. \tag{8.5.8}$$

记

$$\xi_{l+1}=\sum_{j=l+1}^{\infty}x_j<1, \tag{8.5.9}$$

联合(8.5.6)，(8.5.8)与(8.5.9)有

$$\sum_{j=1}^{l}\phi(x_j)+\phi(\xi_{l+1})\leqslant H.$$

$x_j(j=1,2,\cdots,l)$与 ξ_{l+1} 都是正的，所以有 $l+1\geqslant H+2$ 个正量. 因此在结论(2)中等号不可能成立(当等号成立时有 $[H]+1\leqslant l$ 个正量)，从而

$$\sum_{j=1}^{l}x_j+\xi_{l+1}<[H]+\varphi(H-[H]).$$

这就是我们要证明的结论.

8.5.3 $\mu<1$ 时亏量问题的解决

定理 8.7. 设 $f(z)$于开平面亚纯,下级 μ 适合 $\frac{1}{2}<\mu\leqslant 1$, 则

$$\Delta(f)=\sum_{j=1}^{\nu(f)}\delta(a_j,f)\leqslant 2-\sin\mu\pi. \tag{8.5.10}$$

其中等号仅当 $\nu(f)=2$, $\delta_1=1$, $\delta_2=1-\sin\mu\pi$ 时成立.

证. 函数

$$x=\varphi(s)=2\sin^2\frac{s\pi}{4}$$

在$[0,1]$上二阶连续可微, $\varphi(0)=0$, $\varphi(1)=1$, 且 $\varphi'(s)$, $\varphi''(s)$ 在$(0,1)$内恒为正. 其逆为

$$s=\phi(x)=\frac{4}{\pi}\arcsin\sqrt{\frac{x}{2}}.$$

根据展布关系, $f(z)$的亏量 $\delta(a_j,f)$ $(j=1,2,\cdots,\nu(f))$应该满足

$$\frac{4}{\pi}\sum_{j=1}^{\nu(f)}\arcsin\sqrt{\frac{\delta(a_j,f)}{2}}\leqslant 2\mu.$$

因此

$$0<\delta(a_j,f)\leqslant 1 \qquad (j=1,2,\cdots,\nu(f)),$$

$$\sum_{j=1}^{\nu(f)}\phi(\delta(a_j,f))\leqslant 2\mu.$$

应用引理 8.8 有

$$\sum_{j=1}^{\nu(f)}\delta(a_j,f)\leqslant[2\mu]+2\sin^2\frac{(2\mu-[2\mu])\pi}{4}$$

$$=1+2\sin^2\frac{(2\mu-1)\pi}{4}=2-\sin\mu\pi.$$

并且式中等号仅在 $\nu(f)=2$ 和 $\delta(a_1,f)=1$, $\delta(a_2,f)=1-\sin\mu\pi$ 时成立.

(8.5.10)式中等号确实是可以达到的.

当 $\mu=1$ 时，e^z 就适合 $\lambda=\mu=1$,

$$\delta(0, e^z)=\delta(\infty, e^z)=1.$$

当 $\frac{1}{2}<\mu<1$ 时，考虑整函数

$$f(z)=\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{k^{\frac{1}{\mu}}}\right). \tag{8.5.11}$$

显然 $\delta(\infty, f)=1$. 我们将证明 $f(z)$ 的级与下级均为μ，且

$$\delta(0, f)=1-\sin\mu\pi.$$

为此我们需要证明

引理 8.9. 若$f(z)$由(8.5.11)式给定，其中 $\frac{1}{2}<\mu<1$，则对于充分小的正数 δ，在$|\theta|<\pi-\delta$ 内一致地有

$$\log|f(re^{i\theta})|=\pi\frac{\cos\mu\theta}{\sin\mu\pi}r^{\mu}+o(r^{\mu}). \tag{8.5.12}$$

证. 由(8.5.11)有

$$\begin{aligned}\log f(z)&=\sum_{k=1}^{\infty}\log\left(1+\frac{z}{k^{\frac{1}{\mu}}}\right)\\&=\int_{\frac{1}{2}}^{\infty}\log\left(1+\frac{z}{t}\right)dn(t, f=0)\\&=n(t, f=0)\log\left(1+\frac{z}{t}\right)\Big|_{\frac{1}{2}}^{\infty}+z\int_{\frac{1}{2}}^{\infty}\frac{n(t, f=0)dt}{t(t+z)}.\end{aligned}$$

因为 $\mu<1$，故

$$\begin{aligned}&\lim_{t\to\infty}n(t, f=0)\log\left(1+\frac{z}{t}\right)\\&\quad=\lim_{t\to\infty}t^{\mu}\log\left(1+\frac{z}{t}\right)=0.\end{aligned}$$

于是

$$\log f(z)=z\int_{\frac{1}{2}}^{\infty}\frac{n(t, f=0)dt}{t(t+z)}. \tag{8.5.13}$$

对于任给的正数 ε，当 t 大于适当大的正数 t_0 后有

$$|n(t, f=0) - t^\mu| < \varepsilon t^\mu.$$

从而

$$\begin{aligned}
&\left|\log f(z) - z\int_0^\infty \frac{t^\mu}{t(t+z)}dt\right| \\
&\leqslant |z|\int_{\frac{1}{2}}^{t_0} \frac{n(t, f=0)}{t|t+z|}dt + |z|\int_0^{t_0} \frac{t^\mu dt}{t|t+z|} \\
&\quad + \varepsilon|z|\int_{t_0}^\infty \frac{t^\mu dt}{t|t+z|}.
\end{aligned} \tag{8.5.14}$$

可以看出

$$|z|\int_{\frac{1}{2}}^{t_0} \frac{n(t, f=0)dt}{t|t+z|} \leqslant \frac{|z|}{|z|-t_0}\int_{\frac{1}{2}}^{t_0} \frac{n(t, f=0)dt}{t} = O(1),$$

$$|z|\int_0^{t_0} \frac{t^\mu dt}{t|t+z|} = O(1),$$

以及由残数定理有

$$z\int_0^\infty \frac{t^\mu dt}{t(t+z)} = \frac{\pi z^\mu}{\sin \mu\pi}. \tag{8.5.15}$$

若 $z = re^{i\theta}$ 且 $|\theta| \leqslant \frac{\pi}{2}$，易知

$$|t+z| \geqslant \sqrt{t^2 + r^2} > \frac{t+r}{2},$$

于是

$$|z|\int_0^\infty \frac{t^\mu dt}{t|t+z|} \leqslant 2r\int_0^\infty \frac{t^\mu dt}{t(t+r)} = \frac{2\pi r^\mu}{\sin \mu\pi}.$$

若 $\frac{\pi}{2} < |\theta| < \pi - \delta$，则不难看出

$$|t+z| \geqslant \frac{t+r}{2}\sin\frac{\pi-|\theta|}{2} > \frac{t+r}{2}\sin\frac{\delta}{2},$$

从而

$$|z|\int_0^\infty \frac{t^\mu dt}{t|t+z|} < \frac{2r}{\sin\frac{\delta}{2}}\int_0^\infty \frac{t^\mu dt}{t(t+r)}$$

$$= \frac{2\pi r^\mu}{\sin\frac{\delta}{2}\ \sin\mu\pi}.$$

在(8.5.14)式中计及以上这些讨论便可得到引理结论.

对于由(8.5.11)定义的$f(z)$，现在我们来计算$T(r,f)$.

取充分小的正数 δ，$\delta < \pi - \frac{\pi}{2\mu}$. 显然

$$\left| m(r,f) - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi+\delta}^{\pi-\delta} \log^+|f(re^{i\theta})|d\theta \right|$$

$$\leqslant (\log^+ M(r,f))\frac{\delta}{\pi}.$$

但是由(8.5.11),(8.5.13)与(8.5.15)有

$$\log^+ M(r,f) = \log f(r)$$

$$= r\int_{\frac{1}{2}}^\infty \frac{n(t,f=0)}{t(t+r)}dt = (1+o(1))\frac{\pi r^\mu}{\sin\mu\pi}.$$

于是

$$\left| m(r,f) - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi+\delta}^{\pi-\delta} \log^+|f(re^{i\theta})|d\theta \right| \leqslant \delta O(r^\mu).$$

由引理 8.9 有

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi+\delta}^{\pi-\delta} \log^+|f(re^{i\theta})|d\theta$$

$$= \frac{\pi r^\mu}{\sin\mu\pi}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/2\mu}^{\pi/2\mu}\cos\mu\theta d\theta + o(r^\mu)$$

$$= \frac{r^\mu}{\mu\sin\mu\pi} + o(r^\mu).$$

从而

$$T(r,f)=\frac{r^{\mu}}{\mu\sin\mu\pi}+o(r^{\mu}). \tag{8.5.16}$$

即函数 $f(z)$ 的级等于 μ. 再由

$$n(r,f=0)=(1+o(1))r^{\mu}\qquad(r\to\infty),$$

可知

$$N(r,f=0)=\left(\frac{1}{\mu}+o(1)\right)r^{\mu}\qquad(r\to\infty).$$

于是

$$\delta(0,f)=1-\sin\mu\pi.$$

定理 8.8. 设 $f(z)$于开平面亚纯,下级 μ 适合

$$0<\mu\leqslant\frac{1}{2},$$

则

$$\Delta(f)=\sum_{j=1}^{\nu(f)}\delta(a_j,f)\leqslant 1. \tag{8.5.17}$$

并且 $\Delta(f)\geqslant 1-\cos\mu\pi$ 仅当 $\nu(f)=1$ 时成立.

证. 区分两种情况.

(1) $f(z)$以 a_1 为亏值,且 $\delta(a_1,f)\geqslant 1-\cos\mu\pi$. 这时根据定理 8.6 的系 1, a_1 是 $f(z)$ 唯一的亏值,定理结论已经成立.

(2) $1-\cos\mu\pi>\delta(a_1,f)\geqslant\delta(a_2,f)\geqslant\cdots$.

记

$$\delta(a_j,f)=(1-\cos\mu\pi)d_j=\left(2\sin^2\frac{\mu\pi}{2}\right)d_j,$$

则

$$0\leqslant d_j<1\qquad(j=1,2,\cdots,\nu(f)).$$

考虑函数

$$x=\varphi(s)=\left\{\frac{\sin\frac{\mu s\pi}{2}}{\sin\frac{\mu\pi}{2}}\right\}^2,$$

它在 $[0,1]$ 上存在一阶和二阶的连续导数，在 $(0,1)$ 内 $\varphi'(s)$，$\varphi''(s)$恒为正，并且 $\varphi(0)=0$，$\varphi(1)=1$. 其逆为

$$s=\varphi^{-1}(x)=\psi(x)=\frac{2}{\pi\mu}\arcsin\left(x^{\frac{1}{2}}\sin\frac{\mu\pi}{2}\right).$$

这时从展布关系可以得到约束条件

$$\sum_{j=1}^{\nu(f)}\psi(d_j)\leqslant 1.$$

应用引理 8.8 有

$$\sum_{j=1}^{\nu(f)}d_j\leqslant 1.$$

从而

$$\sum_{j=1}\delta(a_j,f)\leqslant 1-\cos\mu\pi.$$

由于 $d_1<1$，于是上两式中等号不能成立. 定理遂得证.

当 $\mu>1$ 时，亏量问题尚未解决. 这是亚纯函数值分布论中遗留的一个重大问题.

如果在亏量问题中把下级 μ 换成级 λ，D. Drasin 与 A. Weitsman[1]曾经提出下述猜想.

若给定 $\lambda\geqslant 1$，并命

$$A_1(\lambda)=2-\frac{2\sin\frac{\pi}{2}(2\lambda-[2\lambda])}{[2\lambda]+2\sin\frac{\pi}{2}(2\lambda-[2\lambda])},$$

$$A_2(\lambda)=2-\frac{2\cos\frac{\pi}{2}(2\lambda-[2\lambda])}{[2\lambda]+1},$$

$$A(\lambda)=\max\{A_1(\lambda),A_2(\lambda)\},$$

则对于级为 λ 的亚纯函数 $f(z)$ 恒有

$$\sum\delta(a,f)\leqslant A(\lambda).$$

Drasin 与 Weitsman[1]证明了，任给 $\lambda>1$，则存在 λ 级亚纯函数 $f(z)$ 使得 $\sum\delta(a,f)=A(\lambda)$. 于是如果上述猜想正确，则上界 $A(\lambda)$是精确的，不能再作改进.

参 考 文 献

Ahlfors, L. V.

[1] Untersuchungen zur Theorie der konformen Abbildung und der ganzen Funktionen, *Acta Soc. Sci. Fenn.*, 1(1930), 1—40.

[2] "*Complex analysis*", 2nd edition, McGraw-Hill, 1966.

Anderson, J. M.

[1] Growth properties of integral and subharmonic functions, *J. d'analyse Math.*, **13**(1964), 355—389.

Anderson, J. M. and Baernstein, A.

[1] The size of the set on which a meromorphic function is large, *Proc. London Math. Soc.*, **36**(1978), 518—539.

Anderson, J. M., Barth, K. F. and Brannan, D. A.

[1] Research problems in complex analysis, *Bull. London Math. Soc.*, **9**(1977), 129—162.

Anderson, J. M. and Clunie, J.

[1] Slowly growing meromorphic functions, *Comment. Math Helv.*, **40**(1966), 267—280.

[2] Entire functions of finite order and lines of Julia, *Math. Z.*, 112 (1969), 59—73.

Аракелян, Н. У.

[1] Целые функций конечного порядка с бесконечным множеством дефектных значений, *ДАН СССР*, **170**(1966), 999—1002.

Baernstein, A.

[1] Proof of Edrei's spread conjecture, *Proc. London Math. Soc.*, **26** (1973), 418—434.

[2] Integral means, Univalent functions and circular symmetrization, *Acta Math.*, **133**(1974), 139—169.

[3] A generalization of the cosπρ Theorem, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **193**(1974), 181—197.

Baker, I. N.

[1] The existence of fixpoints of entire functions, *Math. Zeit.*, **73** (1960), 280—284.

[2] The distribution of fixpoints of entire functions, *Proc. London Math. Soc.*, **16**(1966), 493—506.

[3] The domains of normality of an entire function, *Ann. Acad. Sci. Fenn., Series A. I. Math.*, **1**(1975), 277—283.

Balaguer, F. S.

[1] Sur les directions de Borel-Valiron communes à une fonction entière, à ses dérivées et à ses intégrales successives, *C. R. Acad. Sci.*, **236**(1953), 2196—2198.

[2] Directions of Borel-Valiron of maximum kind common to an entire function and its successive derivatives and integrals, *Mem. Acad.*

Ci. Madrid, 5(1956), 1—51.

Begehr, H.

[1] Über Defektbegriffe in der Theorie der meromorphen Funktionen, *Math. Zeit.*, 116(1970), 349—354.

Biernacki, M.

[1] Sur les directions de Borel des fonctions méromorphes, *Acta Math.*, 56(1930), 197—204.

Bombieri, E. and Ragendda, P.

[1] Sulle deficienze delle funzioni meromorfe di ordine inferiore finito, *Rend. Sem. Fac. Sci. Univ. Cagliari*, 37(1967), 23—38.

Borel, E.

[1] Sur les zéros des fonctions entières, *Acta Math.*, 20(1897), 357—396.

Buckholtz, J. D. and Suffridge, T. J. (editors)

[1] "*Complex analysis*", Proc. of the conference held at the Univ. of Kentucky (1976), Lecture Notes in Math., No. 599, 1977.

Cartan, H.

[1] Sur les systèmes de fonctions holomorphes à variétés lacunaires et leurs applications, *Ann. École Norm. Sup.*, 45(1928), 255—346.

[2] Sur la fonction de croissance attachée à une fonction méromorphe de deux variables et ses applications aux fonctions méromorphes d'une variable, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 189(1929), 521—523.

Cartwright, M. L.

[1] "*Integral functions*", Cambridge Univ. Press, 1956.

张广厚

[1] 关于亚纯函数与其各级导数或积分的公共波莱耳方向的研究，数学学报，20(1977)，(I)73—98;(II)157—177;(III)237—247.

[2] Asymptotic values of entire and meromorphic functions, *Sci. Sinica*, 20(1977), 720—739.

[3] 整函数与亚纯函数的亏值、渐近值和茹利雅方向的关系的研究，中国科学专刊，1978，1—80.

庄圻泰

[1] Un théorème relatif aux directions de Borel des fonctions méromorphe d'ordre fini, *C. R. Acad. Sci.*, 204(1937), 951—952.

[2] Étude sur les familles normales et les familles quasi-normales des fonctions méromorphes, *Rendiconti Circolo Math. Palermo*, 62 (1938), 1—80.

[3] Sur la comparaison de la croissance d'une fonction méromorphe et de celle de sa dérivée, *Bull. Sci. Math.*, 75(1951), 171—190.

[4] Un théorème général sur les fonctions holomorphes dans le cercle unité et ses applications, *Sci. Sinica*, 6(1957), (I) 569—621; (II) 757—831.

[5] Une généralisation d'une inégalité de Nevanlinna, *Sci. Sinica*, 13 (1964), 887—895.

[6] Sur les suites de cercles de remplissage et les directions de Borel des fonctions méromorphes, *Sci. Sinica*, 22(1979), 493—511.

Clunie, J.

[1] On a result of Hayman, *J. London Math. Soc.*, 42(1967), 389—392.

[2] The composition of entire and meromorphic functions, Macintyre Memorial Volume, Ohio Univ. Press, 1970.

Clunie, J. and Hay man, W. K.

[1] "*Proceedings of the symposium on complex analysis at Canterbury*" 1973, London Math. Lecture Notes, no. 12, Cambridge. 1974.

Collingwood, E. F.

[1] Sur quelques théorèmes de M. R. Nevanlinna, *C. R. Acad. Sci.*, 179(1924), 955—957.

Dinghas, A.

[1] "*Wertverteilung meromorpher Funktionen in ein- und mehrfach zusammenhängenden Gebieten*", Lecture Notes in Math., No. 783, 1980.

Drasin, D.

[1] Normal families and the Nevanlinna theory, *Acta Math.*, 122 (1969), 231—263.

[2] An introduction to potential theory and meromorphic functions, *Complex Analysis and its Applications*, 1(1976), 1—93.

[3] A note on functions with deficiency sum two, *Ann. Acad. Sci. Fenn.*, series A. I. Math., 2(1976), 59—66.

[4] The inverse problem of the Nevanlinna theory, *Acta Math.*, 138 (1977), 83—151.

Drasin, D. and Weitsman, A.

[1] Meromorphic functions with large sums of deficiencies, *Advances in Math.*, 15(1974), 93—126.

[2] On the Julia directions and Borel directions of entire functions, *Proc. London Math. Soc.*, 32(1976), 199—212.

Drasin, D., Weitsman, A., Yang Lo and Zhang Guanghou

[1] Deficient values of entire functions and their derivatives (Preprint.)

Dufresnoy, J.

[1] Sur les valeurs exceptionnelles des fonctions méromorphes voisines d'une fonction méromorphes donnée, *C. R. Acad. Sci.*, 208(1939), 255—257.

[2] Sur les domaines couverts par les valeurs d'une fonction méromorphe ou algébroïde, *Ann. École Norm. Sup.*, 58(1941), 179—259.

Edrei, A.

[1] Meromorphic functions with three radially distributed values, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 78(1955), 276—293.

[2] The deficiencies of meromorphic functions of finite lower order,

Duke Math. J., **31**(1964), 1—21.

[3] Sums of deficiencies of meromorphic functions, *J. Analyse Math.*, I 14(1965), 79—107; II. 19(1967), 53—74.

[4] Solution of the deficiency problem for functions of small lower order, *Proc. London Math. Soc.*, **26**(1973), 435—445.

Edrei, A. and Fuchs, W. H. J.

[1] On the growth of meromorphic functions with several deficient values, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 93(1959), 292—328.

[2] Valeurs déficientes et valeurs asymptotiques des fonctions méromorphes, *Comment. Math. Helv.*, 33(1959), 258—295.

[3] The deficiencies of meromorphic functions of order less than one, *Duke Math. J.*, 27(1960), 233—249.

[4] Bounds for the number of deficient values of certain classes of meromorphic functions, *Proc. London Math. Soc.*, 12(1962), 315—344.

[5] On meromorphic functions with regions free of poles and zeros, *Acta Math.*, **108**(1962), 113—145.

[6] Asymptotic behavior of meromorphic functions with extremal spread I, *Ann. Acad. Sci. Fenn., Series A. I. Math.*, **2**(1976), 67—111; II. ibid, **3**(1977), 141—168.

Edrei, A., Fuchs, W. H. J. and Hellerstein, S.

[1] Radial distribution and deficiencies of the values of a meromorphic function, *Pacific J. Math.*, 2(1961), 135—151.

Essén. M. R.

[1] "*The* $\cos \pi\lambda$ *Theorem*", Lecture Notes in Math., No. 467, 1975.

Frank, G.

[1] Eine Vermutung von Hayman über Nullstellen meromorpher Funktionen, *Math. Zeit.*, **149**(1976), 29—36.

[2] Über die Nullstellen meromorpher Funktionen und deren Ableitungen, *Math. Ann.*, **225**(1977), 145—154.

Frank, G. und Hennekemper, W.

[1] Einige Ergebnisse über die Wertverteilung meromorpher Funktionen und ihrer Ableitungen Resultate Math., 4(1981), 39—54.

Frank, G. und Mues, E.

[1] Differentialpolynome, 1979, Oberwolfach.

Fuchs. W. H. J.

[1] A theorem on the Nevanlinna deficiencies of meromorphic functions of finite order, *Ann. of Math.*, **68**(1958), 203—209.

[2] Developments in the classical Nevanlinna theory of meromorphic functions, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **73**(1967), 275—291.

[3] Topics in Nevanlinna theory, Proceedings of the NRL conference on classical function theory, Naval Research Laboratory, Washington, 1970, 1—32.

Fuchs, W. H. J. and Hayman, W. K.

[1] An entire function with assigned deficiencies, Studies in mathematical analysis and related topics. Essays in honor of George Pólya, Stanford Univ. Press, 1962, 117—125.

Gauthier, P. M.

[1] Cercles de remplissage and asymptotic behaviour, *Can. J. Math.*, **21**(1969), 447—455.

[2] The maximum modulus of normal meromorphic functions and applications to value distribution, *Can. J. Math.*, **22**(1970), 803—814.

Гольдберг, А. А.

[1] О дефектах мероморфных функций, *ДАН СССР*, **98**(1954), 893—895.

[2] О множестве дефектных значений мероморфных функций конечного порядка, *Укр. Матем. Ж.*, **11**(1959), 438—443.

Гольдберг, А. А. и Островский, И. В.

[1] "*Распределение значений мероморфных функций*", «Наука», 1970.

Голузин, Г. М.

[1] "*Геометрическая теория функций комплексного переменного,*" «Наука», 1966.

Griffiths, P. A.

[1] "*Entire holomorphic mappings in one and several complex variables*", Annales of Mathematics Studies, No. 85, 1976, Princeton Univ. Press.

Gross, F.

[1] "*Proceedings of the NRL conference on classical function theory*" (Edited by F. Gross), Mathematics Research Center, Naval Research Laboratory, 1970, Washington D. C.

[2] "*Factorization of meromorphic functions*", Mathematics Research Center, Naval Research Laboratory, 1972, Washington D. C.

Hayman, W. K.

[1] Picard values of meromorphic functions and their derivatives, *Ann. of Math.*, **70**(1959), 9—42.

[2] "*Meromorphic functions*", Oxford, 1964.

[3] On the characteristic of functions meromorphic in the plane and of their integrals, *Proc. London Math. Soc.* **14**(1965), 93—128.

[4] "*Research problems in function theory*", Athlone Press (Univ. of London), 1967.

[5] Angular value distribution of power series with gaps, *Proc. London Math. Soc.*, **24**(1972), 590—624.

Hayman, W. K. and Yang Lo.

[1] 角域内全纯函数的值分布，科学通报，**25**(1980)，385—388.

[2] Growth and values of functions regular in an angle, to appear in *Proc. London Math. Soc.*

Hellerstein, S.

[1] On a class of meromorphic functions with deficient zeros and poles,

Pacific J. Math., 13(1963), 115—124.

Hellerstein, S. and Shea, D. F.

[1] Bounds for the deficiencies of meromorphic functions of finite order, Proc. Symposia in Pure Math., Vol. 11(1968), 214—239.

[2] Minimal deficiencies for entire functions with radially distributed zeros, *Proc. London Math. Soc.*, 37(1978), 35—55.

Hellerstein, S. and Williamson, J.

[1] Entire functions with negative zeros and a problem of R. Nevanlinna, J. *d'Analyse Math.*, 22(1969), 233—267.

[2] Derivatives of entire functions and a question of Pólya, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 227(1977), 227—249; II, *ibid.*, 234(1977), 497—503.

[3] The zeros of the second derivative of the reciprocal of an entire function (preprint).

熊庆来

[1] Sur les fonctions entières et les fonctions méromorphes d'ordre infini, *J. Math. pures et appl.* 14(1935), 233—308.

[2] Sur les fonctions holomorphes dont les dérivées admettent une valeur exceptionnelle, *Ann. École Norm. Sup.*, 72(1955), 165—197.

[3] Sur la limitation de $T(r, f)$ sans intervention des pôles, *Bull. Sci. Math.*, 80(1956), 175—190.

[4] "*Sur les fonctions méromorphes et les fonctions algébroïdes*", Mém. Sci. Math., Fasc. 139, Paris, 1957.

[5] Sur le cycle de Montel-Miranda, dans la théorie des familles normales, *Sci. Sinica*, 7(1958), 987—1000.

熊庆来、何育赞

[1] Sur les valeurs multiples des fonctions méromorphes et de leurs dérivées, *Sci. Sinica*, 10(1961), 267—285.

Julia, G.

[1] Sur quelques propriétés nouvelles des fonctions entières ou méromorphes, *Ann. École Norm. Sup.*, 36(1919), 93—125; 37(1920), 165—218.

Kirwan, W. E. and Zalcman, L. (editors)

[1] "*Advances in complex function theory*", Proc. of Seminars held at Maryland Univ. (1973/74), Lecture Notes in Math., No. 505, 1976.

Kjellberg, B.

[1] A theorem on the minimum modulus of entire functions, *Math. Scand.*, 12(1963), 5—11.

顾永兴

[1] 关于亚纯函数正规族，中国科学，1978年第4期，373—384.

[2] 亚纯函数族的一个正规定则，中国科学 1979 年数学专辑(I)，267—274.

赖万才

[1] 黙道定理中的海曼常数的准确值，中国科学，1978年第5期495—500.

Laine, I., Lehto, O. and Sorvali, T. (Editors)

[1] ''*Complex analysis*'', Joensuu 1978, Proceedings, Lecture Notes in Math., No. 747, 1978.

Landau, E.

[1] Über eine Verallgemeinerung des Picardschen Satzes, *S. B. Preuss. Akad. Wiss*, 1904, 1118—1133.

李克群

[1] 关于有理型函数分配论的几个定理之扩充,数学学报,**3**(1953),87—100.

李国平

[1] On the directions of Borel of meromorphic functions of finite order > ½, *Compositio Mathematica*, 6(1938), 285—295.

[2] Sur les directions de Borel des fonctions méromorphes d'ordre infini, *C. R. Acad. Sci.*, **206**(1938), 1548—1550.

吕以辇

[1] 关于代数体函数的直接超越奇点,中国科学外文版,**23**(1980), 407—415.

Marty, F.

[1] Recherches sur la répartition des valeurs d'une fonction méromorphe, *Ann. Fac. Sci. Univ. Toulouse*, **23**(1931), 183—261.

Milloux, H.

[1] Le théorème de Picard, suites de fonctions holomorphes: fonctions holomorphes et fonctions entières, *J. de Math.*, **3**(1924), 345—401.

[2] ''*Extension d'un théorème de M. R. Nevanlinna et applications*'', Act. Scient. et Ind. no. 888, 1940.

[3] Sur les directions de Borel des fonctions entières, de leurs dérivées et de leurs integrales, *J. Analyse Math.*, **1**(1951), 244—330.

Miranda, C.

[1] Sur un nouveau critère de normalité pour les familles des fonctions holomorphes, *Bull. Sci. Math Fr.*, **63**(1935), 185—196.

Montel, P.

[1] ''*Leçons sur les familles normales de fonctions analytiques et leurs applications*'', Coll. Borel, 1927.

Mues, E.

[1] Über eine Defekt und Verzweigungsrelation für die Ableitung Meromorpher Funktionen, *Manuscripta Math.*, **5**(1971), 275—297.

[2] Zur Wertverteilung von Differentialpolynomen, *Archiv der Math.*, **32**(1979), 55—67.

[3] Über ein Problem von Hayman, *Math. Zeit.*, **164**(1979), 239—259.

Натансон, И. П.

[1] "*Теория функций вещественной переменной*". ГИТТЛ, 1957.

Nevanlinna, R.

[1] Zur Theorie der meromorphen Funktionen, *Acta Math.*, **46**(1925), 1—99.

[2] *"Le Théorème de Picard-Borel et la théorie des fonctions méromorphes"*, Coll. Borel, 1929.

[3] *"Eindeutige analytische Funktionen"*, 2 edition, Springer, 1953.

Ostrowski, A.

[1] Ueber Folgen analytischer Funktionen und einige Verschärfungen des Picardschen Satzes, *Math. Zeit.*, **24**(1926), 215—258.

Островский, И. В.

[1] Связь роста мероморфной функций с распределением её значений по аргументам, *Изв. АНСССР, Сер. Матем.*, **25** (1961), 277—328.

Петренко, В. П.

[1] Некоторые Оценки для величин дефектов мероморфной функций, *Сиб. Матем. Ж.*, **7**(1966), 1319—1336.

Pfluger, A.

[1] Zur Defektrelation ganzer Funktionen endlicher Ordnung, *Comment. Math. Helv.*, **19**(1946), 91—104.

Polya, G.

[1] Untersuchungen über Lücken und Singularitäten von Potenzreihen, *Math. Z.*, **29**(1929), 549—640.

Pommerenke, C.

[1] On Bloch functions, *J. London Math. Soc.*, **2**(1970), 689—695.

[2] On univalent functions, Bloch functions and BMOA, *Math. Ann.*, **236**(1978), 199—208.

蒲保民

[1] 关于无限级半纯函数的 Borel 向，四川大学学报自然科学，1957 第 1 期，41—60.

Rauch, A.

[1] Extension de théorèmes relatifs aux directions de Borel des fonctions méromorphes, *J. de Math. pures et appl.*, **12**(1933), 109—171.

[2] Cas où une direction de Borel d'une fonction entière f(z) d'ordre fini est aussi direction de Borel pour f'(z), *C. R. Acad. Sci.*, **199** (1934), 1014—1016.

Schottky, F.

[1] Über den Picardschen Satz und die Borelschen Ungleichungen. *S. B. Preuss, Akad. Wiss*, 1904, 1244—1263.

Shea, D. F.

[1] On the Valiron deficiencies of meromorphic functions of finite order, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **124**(1966), 201—227.

谢晖春

[1] 关于亚纯函数理论中与极点无涉的基本不等式，数学学报，9(1959)，281—291.

小泽满

[1] "近代函数论 I 值分布の理论"，森北出版株式会社，1976.

Teichmüller, O.

[1] Vermutungen und Sätze über die Wertverteilung gebrochener Funktionen endlicher Ordnung, *Deutsche Math.*, **4**(1939), 163—190.

Titchmarsh, E. C.

[1] "*The theory of functions*", 2nd edition, Oxford, 1939.

Toppila, S.

[1] On the counting function for the *a*-values of a meromorphic function, *Ann. Acad. Sci. Fenn., Series A. I. Math.*, **2**(1976), 565—572.

[2] On Nevanlinna's characteristic function of entire functions and their derivatives, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Series A. I. Math.*, (to appear).

Tsuji, M.

[1] "*Potential theory in modern function theory*", Maruzen, Tokyo, 1959.

Valiron, G.

[1] Sur les fonctions entières d'ordre nul et d'ordre fini et en particulier les fonctions à correspondance régulière, *Ann. Fac. Sci. Univ. Toulouse*, **5**(1914), 117—257.

[2] "*Lectures on the general theory of integral functions*", Edouard Privat, Toulouse, 1923.

[3] Recherches sur le théorème de M. Borel dans la théorie des fonctions méromorphes, *Acta Math.*, **52**(1928), 67—92.

[4] "*Directions de Borel des fonctions méromorphes*", Mémor. Sci. Math., fasc. 89, Paris, 1938.

[5] Sur les directions de Borel des fonctions méromorphes d'ordre infini, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **206**(1938), 575—577.

[6] Sur les valeurs déficientes des fonctions méromorphes d'ordre nul, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **230**(1950), 40—42.

Weitsman, A.

[1] Meromorphic functions with maximal deficiency sum and a conjecture of F. Nevanlinna. *Acta Math.*, **123**(1969), 115—139.

[2] A theorem on Nevanlinna deficiencies, *Acta Math.*, **128**(1972), 41—52.

Whittaker, J. M.

[1] The order of the derivative of a meromorphic function, *J. London Math. Soc.*, **11**(1936), 82—87.

Winkler, J.

[1] Bemerkungen zur Wertevertilung spezieller meromorpher Funktionen an singulären Stellen, *Math. Zeit.*, **93**(1966), 48—59.

[2] Zur Existenz ganzer Funktionen bei vorgegebener Menge der Nullstellen und Einsstellen, *Math. Zeit.*, **168**(1979), 77—85.

Wittich, H.

[1] "*Neuere Untersuchungen über eindeutige analytische Funktionen*",

Springer, 1955.

杨重骏 (Yang Chung-chun)

[1] On deficiencies of differential polynomials, *Math. Zeit.*, **116**(1970), 197—204; II. ibid. **125**(1972), 107—112.

[2] On meromorphic functions with three almost linear values, *Math. Zeit.*, **123**(1971). 131—138.

杨乐

[1] 亚纯函数及函数组合的重值，数学学报，**14**(1964)，428—437.

[2] Sur les valeurs quasi-exceptionelles des fonctions holomorphes. *Sci. Sinica*. **13**(1964), 879—885.

[3] 整函数与其导数的辐角分布和重值，中国科学，1979 年第 8 期，731—751;外文版，**23**(1980)，16—39.

[4] 亚纯函数在角域内的波莱耳方向，中国科学 1979 年数学专辑(I)，149—164.

[5] Common Borel directions of a meromorphic function and its derivative. *Sci. Sinica*, Special Issue (II), 1979, 91—104.

[6] 亚纯函数的亏函数，中国科学，**4**(1981)，396—404: 外文版，**24**(1981)，1179—1189.

[7] Meromorphic functions and their derivatives, to appear in J. London Math. Soc.

[8] A general criterion for normality (preprint).

杨乐、张广厚

[1] Recherches sur la normalité des familles de fonctions analytiques à des valeurs multiples, I. Un nouveau critère et quelques applications, *Sci. Sinica*, **14**(1965), 1258—1271; II. Géneralisations, Ibid. **15**(1966), 433—453.

[2] 亚纯函数的波莱耳方向的分布，中国科学 1973 年第 4 期，358—372. 外文版 **16**(1973)，465—482.

[3] Recherches sur le nombre des valeurs déficientes et le nombre des directions de Borel des fonctions méromorphes. *Sci. Sinica*, **18** (1975), 23—37.

[4] 关于整函数的亏值总数，数学学报，**18**(1975)，35—53.

[5] 具有给定奇异方向的亚纯函数的构造，中国科学 1976 年第 3 期，308—319;外文版 **19**(1976)，445—459.

[6] 整函数的波莱耳方向的分布，数学学报，**19**(1976)，157—168.

[7] 亚纯函数值分布论中的一些进展，科学通报，**22**(1977)，375—380.

[8] 一类整函数的亏值，中国科学 1977 年 第 4 期，289—300; 外文版 **20** (1977)，421—435.

[9] 整函数的亏值与渐近值，中国科学 1979 年第 1 期，1—12;外文版数学专辑(II)(1979)，190—203.

杨乐、肖修治

[1] Sur les points de Borel des fonctions méromorphes et de leur dérivées, *Sci. Sinica*, **16**(1965), 1556—1573.

余家荣

[1] **Sur les droites de Borel de certaines fonctions entières**, *Ann. École Norm. Sup.*, 68(1951), 65—104.
[2] **随机狄里克莱级数的一些性质，数学学报，21**(1978),97—117.

人 名 索 引

名 词 索 引